MATHEMATICS

Class X (Semester - 2)

Text Book Development Committee

Sri **Praveen Prakash** IAS
Principal Secretary to Government
Department of School Education, AP

Sri. **S. Suresh Kumar** IAS
Commissioner of School Education , AP

Sri. **B. Srinivasa Rao** IAS
State Project Director, Samagra Shiksha, AP

Sri. **K. Ravindranath Reddy** MA., B.Ed.
Director, Government Textbook Press, AP

Dr. **B. Pratap Reddy** MA., B.Ed., Ph.D.
Director, SCERT, AP

Programme Co-ordinators

Dr. **G. Kesava Reddy,** MSc, MSc, MEd, MPhil, PhD
Prof. C&T, SCERT, AP

Subject Co-ordinators

Sri **Malempati Somasekhara Brahmanandam,** M.Sc., M.Ed.
Faculty, SCERT, AP

Technical Co-ordinator

Dr. **Ch.V.S. Ramesh Kumar**
Faculty, SCERT, AP

State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh

Published by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

© Government of Andhra Pradesh, Amaravati

First Published - 2024

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Commissioner of School Education, Amaravati, Andhra Pradesh.

This book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

Printed in India
at the A.P. Govt. Textbook Press
Amaravati
Andhra Pradesh

Translators

Dr. ***Chennamsetti. Ramesh***, S.A.
MPUPS, Mamillapalli, Guntur Dt.

Sri. *Kandula.Mallikarjuna Reddy*, S.A.
GSR MC HS, Vijayawada, NTR Dt.

Sri ***T. Samba Siva Rao***, S.A.
ZPHS,Nidubrolu,Ponnuru(M),Guntur Dt.

Sri ***G.V. Krishna Mohan***, S.A.
ZPHS, Karavadi, Prakasam Dt.

Sri. ***Md. Nazeer Hussain***, S.A.
Samagra Shiksha, A.P.

Sri ***Kadiyala. Mallikarjuna***, S.A.
ZPHS, Enumalapalli, Puttaparthi (M) S S S Dt.

Sri ***Turpati. Lakshmu Naidu***, S.A.
ZPHS, Thimma raju peta, Anakapalli Dt.

Smt ***Majji. Sandhya Rani***, CRT.
KGBV, Gurla (M), Vizianagaram Dt.

Smt. ***T. Vijaya Kumari***, HM.
ZPHS, Lavanur, Kondapuram (M), Kadapa Dt.

Sri ***Gangalapudi Bhasker***, S.A.
ZPHS, Vadlamopuru, Dakkili(M), TirupatiDt.

Smt. ***K.Vahini***, S.A.
ZPHS,Kosuru,Movva(M),Krishna Dt.

Sri ***G.V. Subrahmanya Sastry***, S.A.
ZPHS, Kommuvalasa,L.N.Peta (M)

Smt ***P. Anjani Kumari***, PGT.
APMS, Dechavaram, Palnadu Dt.

Sri ***Y.L. Sreenivasulu***, S.A.
GHS, Tangutur, Prakasam Dt.

Sri. ***Donepudi.Venkateswara Rao***, S.A.
MPUPS, Kanimerla, Mylavaram (M), NTR Dt.

Sri. ***P. Nagendra Naik***, S.A.
GHS, Yerragondapalem, Prakasam Dt.

Sri. ***Siyyadri Yellajiyamma***, S.A.
MPUPS, Gopalapatnam, Anakapalli Dt.

Smt. ***Yasam. Jaya Bharati***, S.A.
ZPGHS, Giddalur, Prakasam Dt.

Editors for Translation

Sri ***S.Satish,***
Faculty, SCERT, A.P

Sri ***K.Satish Babu, MEO-2,***
Yarravari Palem, Chittore Dt.

Sri ***Kesiraju Srinivas,***
Faculty, SCERT, A.P

Sri ***M. Somasekhar.B.,***
Faculty, SCERT, A.P

Designing & Page Layout : Stock Assortment, Bapatla.

Foreword

The National Curriculum Framework 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisors for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi and Professor G.P. Dikshit (Retd.) of Lucknow University, Lucknow for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are

indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director

New Delhi | National Council of Educational

15 November 2006 | Research and Training

Foreword

The Government of Andhra Pradesh has unleashed a new era in school education by introducing extensive curricular reforms from the academic year 2020-21. The Government has taken up curricular reforms intending to enhance the learning outcomes of the children with focus on building solid foundational learning and to build up an environment conducive for an effective teaching-learning process. To achieve this objective, special care has been taken in designing the textbooks to achieve global standards. As part of this the Government of Andhra Pradesh has decided to introduce NCERT Textbooks from class VI onwards.

As a part of the curricularm reform, an effort was made to ensure quality transaction of textbooks, bilingual method was used. The mathematical concepts in the text book are developed based on themes like Number System, Arithmetic, Algebra, Mensuration, Geometry and Statistics. In this text book, concepts are introduced through activities related to daily life situations and conversations. To strengthen these concepts, individual activities, group activities and whole class activities are designed. The textbook attempted to enhance this endeavor through incorporating QR codes in each chapter to enable efficient learning outside the class room.

We are grateful to our Honourable Chief Minister, Sri Y.S. Jagan Mohan Reddy, Andhra Pradesh for being our source of inspiration to carry out this extensive reform in the Education Department. We extend our gratitude to Sri Botcha Satyanarayana, Honourable Minister of Education , Govt. of Andhra Pradesh for striving towards qualitative education. Our special thanks to Sri. Praveen Prakash, IAS, Principal Secretary, School Education, Sri. S. Suresh Kumar, IAS, Commissioner of School Education, Sri. B. Srinivasa Rao, IAS, State Project Director, SS, Ms. Nidhi Meena, IAS, Special Officer, English Medium Project for their constant motivation and guidance.

We convey our sincere thanks to the text book writers, who studied curriculum and best practices across the globe to reach global standards. Our heartful thanks to Director NCERT in designing the text book and for issuing copyrights to print the textbooks by the State Government. We also thank our Coordinators, Editors, Subject Coordinators, Technical team members, Artists, DTP and Layout designers for their contribution in the development of this text book. We invite constructive feedback from the teachers, parents and Educationalists for the further refinement of the text book.

Dr. B. Pratap Reddy
Director
SCERT – Andhra Pradesh

Rationalisation of Content in the Textbooks

In view of the COVID-19 pandemic, it is imperative to reduce content load on students. The National Education Policy 2020, also emphasises reducing the content load and providing opportunities for experiential learning with creative mindset. In this background, the NCERT has undertaken the exercise to rationalise the textbooks across all classes. Learning Outcomes already developed by the NCERT across classes have been taken into consideration in this exercise.

Contents of the textbooks have been rationalised in view of the following:

- Overlapping with similar content included in other subject areas in the same class
- Similar content included in the lower or higher class in the same subject
- Difficulty level
- Content, which is easily accessible to students without much interventions from teachers and can be learned by children through self-learning or peer-learning
- Content, which is irrelevant in the present context

This present edition, is a reformatted version after carrying out the changes given above.

TEXTBOOK DEVELOPMENT COMMITTEE

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor,* Inter-University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

CHIEF ADVISORS

P. Sinclair, *Professor* of Mathematics, IGNOU, New Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, *Professor* and *Head* (Retd.)*,* DESM, NCERT, New Delhi

MEMBERS

Anjali Lal, *PGT,* DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

A.K. Wazalwar, *Professor* and *Head,* DESM, NCERT

B.S. Upadhyaya, *Professor,* RIE, Mysore

Jayanti Datta, *PGT,* Salwan Public School, Gurgaon

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Manica Aggarwal, Green Park, New Delhi

N.D. Shukla, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Ram Avtar, *Professor* (Retd.) & *Consultant,* DESM, NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, St. John's Road, Bangalore

S. Jagdeeshan, *Teacher* and *Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S.K.S. Gautam, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri District Centre, Delhi

V.A. Sujatha, *TGT,* Kendriya Vidyalaya No. 1, Vasco, Goa

V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chankyapuri, New Delhi

MEMBER-COORDINATOR

R.P. Maurya, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop:

Mala Mani, *TGT,* Amity International School, Sector-44, Noida; Meera Mahadevan, *TGT,* Atomic Energy Central School, No. 4, Anushakti Nagar, Mumbai; Rashmi Rana, *TGT,* D.A.V. Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi; Mohammad Qasim, *TGT,* Anglo Arabic Senior Secondary School, Ajmeri Gate, Delhi; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Happy Valley, Mussoorie; Rakesh Kaushik, *TGT,* Sainik School, Kunjpura, Karnal; Ashok Kumar Gupta, *TGT,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Dudhnoi, Distt. Goalpara; Sankar Misra, *TGT,* Demonstration Multipurpose School, RIE, Bhubaneswar; Uaday Singh, *Lecturer,* Department of Mathematics, B.H.U., Varanasi; B.R. Handa, *Emeritus Professor*, IIT, New Delhi; Monika Singh, *Lecturer,* Sri Ram College (University of Delhi), Lajpat Nagar, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Sirpur, Kagaz Nagar, Adilabad; Ajay Kumar Singh, *TGT,* Ramjas Sr. Secondary School No. 3, Chandni Chowk, Delhi; Mukesh Kumar Agrawal, *TGT,* S.S.A.P.G.B.S.S. School, Sector-V, Dr Ambedkar Nagar, New Delhi.

Special thanks are due to Professor Hukum Singh, *Head* (Retd.), DESM, NCERT for his support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, *Incharge,* Computer Station; Purnendu Kumar Barik, *Copy Editor;* Naresh Kumar and Nargis Islam, *D.T.P. Operators;* Yogita Sharma, *Proof Reader*.

The Contribution of APC-Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

NATIONAL ANTHEM | జాతీయ గీతం

Jana gana mana adhinayaka jaya he
Bharata bhagya vidhata
Panjaba Sindhu Gujarata Maratha
Dravida Utkala Banga
Vindhya Himachala Yamuna Ganga
uchchala jaladhi taranga
Tava Subha name jage, tave subha asisa mage,
gahe tava jaya gatha.
Jana gana mangala dayaka jaya he
Bharata bhagya vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

–Rabindranath Tagore

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగా!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా!
ఉచ్ఛల జలధి తరంగా!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాఁగే
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

- రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

PLEDGE | ప్రతిజ్ఞ

India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ
సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికై సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా
నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

- పైడిమర్రి వెంకటసుబ్బారావు

MATHEMATICS
గణితం

Class / తరగతి - X

Semester (సెమిస్టర్) - II

CONTENTS / విషయ సూచిక

Chapter 8	INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY	
అధ్యాయం 8	త్రికోణమితి పరిచయం	2 - 41
Chapter 9	SOME APPLICATIONS OF TRIGONOMETRY	
అధ్యాయం 9	త్రికోణమితి యొక్క అనువర్తనాలు	42 - 63
Chapter 10	CIRCLES	
అధ్యాయం 10	వృత్తాలు	64 - 83
Chapter 11	AREAS RELATED TO CIRCLES	
అధ్యాయం 11	వృత్తాలు - సంబంధిత వైశాల్యాలు	84 - 97
Chapter 12	SURFACE AREAS AND VOLUMES	
అధ్యాయం 12	ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు	98 - 117
Chapter 13	STATISTICS	
అధ్యాయం 13	సాంఖ్యక శాస్త్రం	118 - 179
Chapter 14	PROBABILITY	
అధ్యాయం 14	సంభావ్యత	180 - 211
	Appendix 2	
	అనుబంధం 2	212 - 233
	Answers	
	జవాబులు	234 - 247

Teacher corner

Student corner

1062CH08

INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY 8

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

– J.F. Herbart (1890)

8.1 Introduction

You have already studied about triangles, and in particular, right triangles, in your earlier classes. Let us take some examples from our surroundings where right triangles can be imagined to be formed. For instance :

1. Suppose the students of a school are visiting Qutub Minar. Now, if a student is looking at the top of the Minar, a right triangle can be imagined to be made, as shown in Fig 8.1. Can the student find out the height of the Minar, without actually measuring it?

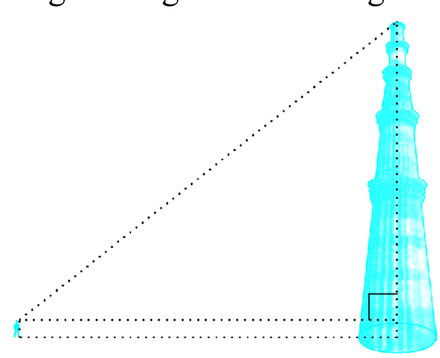


Fig. 8.1

2. Suppose a girl is sitting on the balcony of her house located on the bank of a river. She is looking down at a flower pot placed on a stair of a temple situated nearby on the other bank of the river. A right triangle is imagined to be made in this situation as shown in Fig.8.2. If you know the height at which the person is sitting, can you find the width of the river?

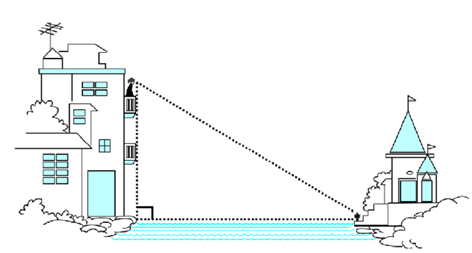


Fig. 8.2

1062CH08

త్రికోణమితి పరిచయం 8

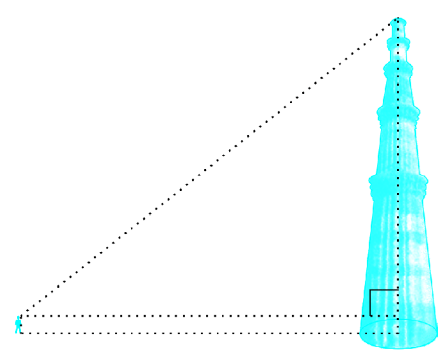
గణితశాస్త్రంలో ఉన్నత స్థానాన్ని పొందడానికి త్రికోణమితిని
మించినది మరేదీ లేదు..

– జె.ఎఫ్. హెర్బర్ట్ (1890)

8.1 పరిచయం

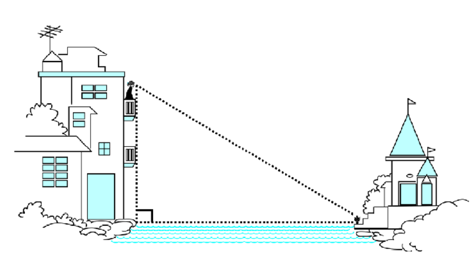
మీరు ఇది వరకే త్రిభుజాల గురించి మరియు ప్రత్యేకించి లంబకోణ త్రిభుజాల గురించి కింది తరగతులలో చదివియున్నారు. మన చుట్టూ లంబకోణ త్రిభుజాలు ఏర్పడగల కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం. ఉదాహరణకు:

1. ఒక పాఠశాల విద్యార్థులు కుతుబ్‌మీనార్ ను సందర్శిస్తున్నారు అనుకుందాం. ఇప్పుడు ఒక విద్యార్థి మీనార్ యొక్క పై భాగాన్ని చూస్తున్నాడు అనుకొంటే, ప్రక్క పటం 8.1 లో చూపిన విధంగా ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్పడుతుందని ఊహించగలడు. ఇప్పుడు ఒక విద్యార్థి మీనార్ యొక్క ఎత్తును కొలవకుండానే కనుక్కోగలడా?



పటం 8.1

2. నది ఒడ్డున ఉన్న తమ ఇంటి బాల్కనీలో ఒక బాలిక కూర్చొని ఉందనుకొందాం. ఆమె నది అవతలి ఒడ్డున ఉన్న గుడి మెట్ల మీద పైనున్న పూలకుండీని చూస్తూ ఉంది. ఈ సందర్భంలో, ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్పడుతుందని ఊహించవచ్చు. ఒక వేళ కూర్చున్న బాలిక యొక్క ఎత్తు తెలిసినచో, నది వెడల్పును మీరు కనుగొనగలరా?



పటం 8.2

3. Suppose a hot air balloon is flying in the air. A girl happens to spot the balloon in the sky and runs to her mother to tell her about it. Her mother rushes out of the house to look at the balloon.Now when the girl had spotted the balloon intially it was at point A. When both the mother and daughter came out to see it, it had already travelled to another point B. Can you find the altitude of B from the ground?

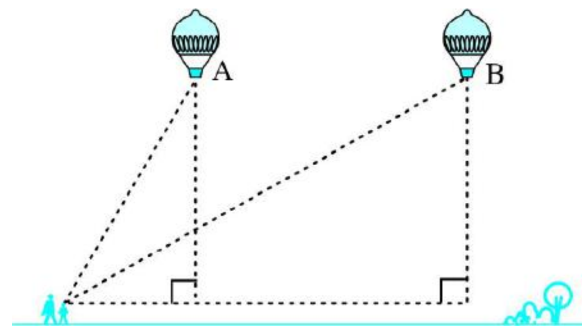


Fig. 8.3

In all the situations given above, the distances or heights can be found by using some mathematical techniques, which come under a branch of mathematics called 'trigonometry'. The word 'trigonometry' is derived from the Greek words 'tri' (meaning three), 'gon' (meaning sides) and 'metron' (meaning measure). In fact, **trigonometry** is the study of relationships between the sides and angles of a triangle. The earliest known work on trigonometry was recorded in Egypt and Babylon. Early astronomers used it to find out the distances of the stars and planets from the Earth. Even today, most of the technologically advanced methods used in Engineering and Physical Sciences are based on trigonometrical concepts.

In this chapter, we will study some ratios of the sides of a right triangle with respect to its acute angles, called **trigonometric ratios of the angle.** We will restrict our discussion to acute angles only. However, these ratios can be extended to other angles also. We will also define the trigonometric ratios for angles of measure 0° and 90°. We will calculate trigonometric ratios for some specific angles and establish some identities involving these ratios, called **trigonometric identities.**

8.2 Trigonometric Ratios

In Section 8.1, you have seen some right triangles imagined to be formed in different situations.

Let us take a right triangle ABC as shown in Fig. 8.4.

Here, ∠CAB (or, in brief, angle A) is an acute angle. Note the position of the side BC with respect to angle A. It faces ∠A. We call it the *side opposite* to angle A. AC is the *hypotenuse* of the right triangle and the side AB is a part of ∠A. So, we call it the *side adjacent* to angle A.

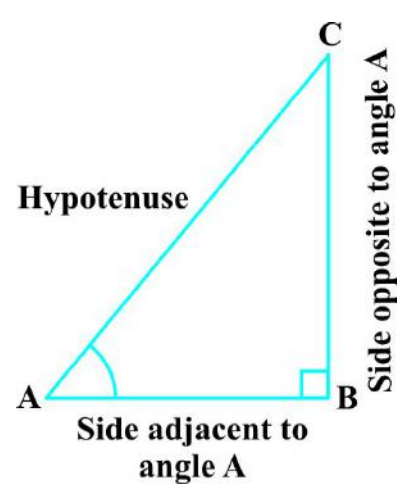
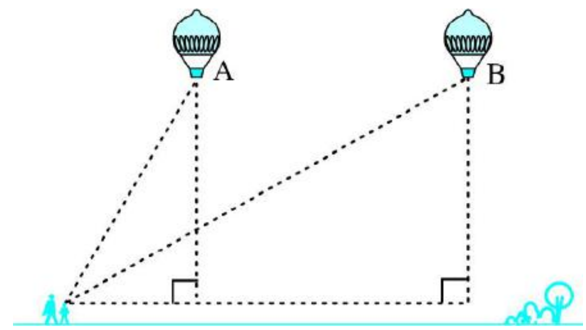


Fig. 8.4

3. ఒక హాట్ ఎయిర్ బెలూన్ గాలిలో ఎగురుతుంది అనుకుందాం. ఆకాశంలో ఎగురుతున్న బెలూన్‌ని ఒక బాలిక గుర్తించి, దాని గురించి చెప్పడానికి వాళ్ళ అమ్మ వద్దకు పరిగెత్తింది. బెలూన్‌ని చూడటానికి వాళ్ళ అమ్మ హడావిడిగా బయటకు వచ్చింది. బెలూన్‌ని ఆ బాలిక మొదటిసారి చూసినపుడు, అది బిందువు A వద్ద ఉంది. తల్లి కూతుళ్లు ఇద్దరు బయటికొచ్చి చూసేటప్పటికి, అది మరో బిందువు B వద్దకు ప్రయాణించింది. నేలపై నుండి B ఎత్తును మీరు కనుగొనగలరా?



పటం 8.3

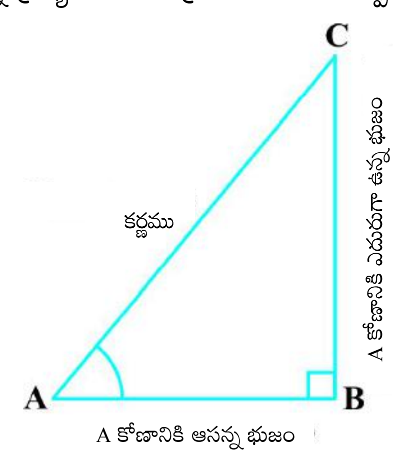
పైన ఇవ్వబడిన అన్ని సందర్భాలలోను, దూరాలను లేదా ఎత్తులను కొన్ని గణిత పద్ధతులు ఉపయోగించి గణితశాస్త్రంలో ఒక భాగమైన 'త్రికోణమితి' ద్వారా కనుక్కోవచ్చు. త్రికోణమితి (**trigonometry**) అనే పదం 'tri' (అనగా మూడు) 'gon' (అనగా భుజాలు) మరియు metron (అనగా కొలవడం) అనే గ్రీకు పదాల కలయిక వలన ఏర్పడింది. వాస్తవానికి **త్రికోణమితి** అనగా ఒక త్రిభుజంలోని భుజాలు మరియు కోణాల మధ్యగల సంబంధం గురించి తెలిపే ఒక శాస్త్రం. త్రికోణమితిని మొట్ట మొదటిసారిగా ఈజిప్టు మరియు బాబిలోనియాలో ఉపయోగించినట్లు గుర్తించారు. ప్రారంభంలో, ఖగోళ శాస్త్రవేత్తలు భూమి నుండి నక్షత్రాలు మరియు గ్రహాలకు మధ్య గల దూరాలను తెలుసుకోవడానికి త్రికోణమితిని ఉపయోగించారు. నేటికి కూడా ఇంజనీరింగ్ మరియు భౌతికశాస్త్రాలలో ఉపయోగించే అధునాతన సాంకేతిక పద్ధతులలో ఎక్కువ భాగం త్రికోణమితి భావనలపై ఆధారపడి ఉన్నాయి.

ఈ అధ్యాయంలో లంబకోణ త్రిభుజంలోని భుజాలు మరియు అల్పకోణాల మధ్యగల నిష్పత్తులను అధ్యయనం చేస్తాం. వాటిని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు అని అంటాము. ఈ అధ్యాయంలో మనం అల్పకోణాల గురించి మాత్రమే చర్చిస్తాం. అయితే ఈ నిష్పత్తులను ఇతర కోణాలకు కూడా విస్తరించుకోవచ్చు. అలాగే త్రికోణమితి నిష్పత్తులలో 0° మరియు 90° కోణాల గురించి కూడా తెలుసుకుంటాం. అలాగే మనం కొన్ని నిర్దిష్ట కోణాలను లెక్కిస్తాం. కొన్ని ప్రత్యేక కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను లెక్కించి, త్రికోణమితీయ ధర్మాలు అని పిలువబడే కొన్ని ధర్మాలను రాబడతాం.

8.2 త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

వేర్వేరు సందర్భాలలో ఏర్పడే కొన్ని లంబకోణ త్రిభుజాలను సెక్షన్ 8.1లో మీరు ఊహించుకున్నారు.

పటంలో 8.4 లో చూపినట్లు లంబకోణ త్రిభుజం ABC ని తీసుకుందాం. ఇక్కడ $\angle CAB$ (సంక్షిప్తంగా కోణం A) ఒక అల్పకోణం. కోణం A కి అనుగుణంగా భుజం BC స్థితిని గుర్తించండి. అది $\angle A$ కు ఎదురుగా ఉంది. దానిని కోణం A కి ఎదురుగా ఉన్న భుజం అని పిలుస్తాం. లంబకోణ త్రిభుజం AC అనేది కర్ణం మరియు భుజం AB అనేది $\angle A$లో ఒక భాగం. కనుక, దానిని $\angle A$ కు ఆసన్న భుజం అంటాం.



పటం 8.4

Note that the position of sides change when you consider angle C in place of A (see Fig. 8.5).

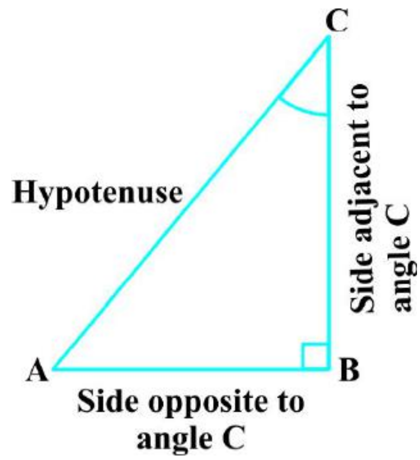


Fig. 8.5

You have studied the concept of 'ratio' in your earlier classes. We now define certain ratios involving the sides of a right triangle, and call them trigonometric ratios.

The trigonometric ratios of the angle A in right triangle ABC (see Fig. 8.4) are defined as follows :

$$\text{sine of } \angle A = \frac{\text{side opposite to angle A}}{\text{hypotenuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{cosine of } \angle A = \frac{\text{side adjacent to angle A}}{\text{hypotenuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{tangent of } \angle A = \frac{\text{side opposite to angle A}}{\text{side adjacent to angle A}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{cosecant of } \angle A = \frac{1}{\text{sine of } \angle A} = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{side opposite to angle A}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{secant of } \angle A = \frac{1}{\text{cosine of } \angle A} = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{side adjacent to angle A}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{cotangent of } \angle A = \frac{1}{\text{tangent of } \angle A} = \frac{\text{side adjacent to angle A}}{\text{side opposite to angle A}} = \frac{AB}{BC}$$

The ratios defined above are abbreviated as sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A and cot A respectively. Note that the ratios **cosec A, sec A and cot A** are respectively, the reciprocals of the ratios sin A, cos A and tan A.

Also, observe that $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ and $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$.

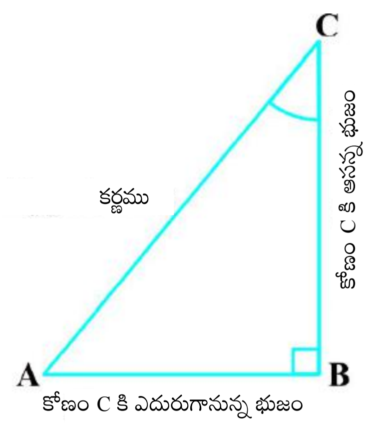
So, the **trigonometric ratios** of an acute angle in a right triangle express the relationship between the angle and the length of its sides.

Why don't you try to define the trigonometric ratios for angle C in the right triangle? (See Fig. 8.5)

ఇప్పుడు కోణం C ని A స్థానంలో పరిగణిస్తే భుజాల స్థానాలు మారిపోతాయని గుర్తించండి (పటం 8.5 చూడండి).

గత తరగతులలో 'నిష్పత్తి' అనే భావనను అధ్యయనం చేసి ఉన్నారు. లంబకోణ త్రిభుజ భుజాలకు చెందిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు అని పిలవబడే కొన్ని ప్రత్యేక నిష్పత్తులను మనం ఇప్పుడు నిర్వచిస్తాం.

లంబకోణ త్రిభుజం ABC (పటం 8.4 చూడండి) లో కోణం A **యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు** ఈ క్రింది విధంగా ఉంటాయి:



పటం 8.5

$$\angle A \text{ యొక్క sine} = \frac{\text{కోణం A కు ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}} \quad \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ యొక్క cosine} = \frac{\text{కోణం A కు ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}} \quad \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ యొక్క tangent} = \frac{\text{కోణం A కు ఎదుటి భుజం}}{\angle A \text{ కు ఆసన్న భుజం}} \quad \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ యొక్క cosecant} = \frac{1}{\angle A \text{ యొక్క sine}} \quad \frac{\text{కర్ణం}}{\text{కోణం A కు ఎదుటి భుజం}} \quad \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ యొక్క secant} = \frac{1}{\angle A \text{ యొక్క cos}} \quad \frac{\text{కర్ణం}}{\text{కోణం A కు ఆసన్న భుజం}} \quad \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ యొక్క cotangent} = \frac{1}{\angle A \text{ యొక్క tan}} \quad \frac{\text{కోణం A కు ఆసన్న భుజం}}{\text{కోణం A కు ఎదుటి భుజం}} \quad \frac{AB}{BC}$$

పై నిష్పత్తులను సంక్షిప్తంగా sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A మరియు cot A లు గా నిర్వచించారు. నిష్పత్తులు **cosec A, sec A, cot A** లు వరుసగా sin A, cos A, tan A లకు వ్యుత్క్రమాలు అని గమనించవచ్చు.

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ మరియు } \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \text{ అని గమనించవచ్చు.}$$

కావున, లంబకోణ త్రిభుజంలోని అల్పకోణం యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు, ఇచ్చిన లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క కోణం మరియు దాని భుజాల పొడవులకు మధ్యగల నిష్పత్తిని తెలియచేస్తాయి.

ఇచ్చిన లంబకోణ త్రిభుజంలోని కోణం C యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను నిర్వచించడాన్ని మీరు ప్రయత్నించగలరా? (పటం 8.5 చూడండి).

The first use of the idea of **'sine'** in the way we use it today was in the work *Aryabhatiyam* by Aryabhata, in A.D. 500. Aryabhata used the word ***ardha-jya*** for the half-chord, which was shortened to ***jya*** or ***jiva*** in due course. When the *Aryabhatiyam* was translated into Arabic, the word ***jiva*** was retained as it is. The word ***jiva*** was translated into ***sinus,*** which means curve, when the Arabic version was translated into Latin. Soon the word ***sinus***, also used as ***sine***, became common in mathematical texts throughout Europe. An English Professor of astronomy Edmund Gunter (1581–1626), first used the abbreviated notation **'*sin*'.**

Aryabhata
C.E. 476 – 550

The origin of the terms **'cosine'** and **'tangent'** was much later. The cosine function arose from the need to compute the sine of the complementary angle. Aryabhatta called it **kotijya**. The name ***cosinus*** originated with Edmund Gunter. In 1674, the English Mathematician Sir Jonas Moore first used the abbreviated notation **'*cos*'**.

Remark : Note that the symbol sin A is used as an abbreviation for 'the sine of the angle A'. sin A is *not* the product of 'sin' and A. 'sin' separated from A has no meaning. Similarly, cos A is *not* the product of 'cos' and A. Similar interpretations follow for other trigonometric ratios also.

Now, if we take a point P on the hypotenuse AC or a point Q on AC extended, of the right triangle ABC and draw PM perpendicular to AB and QN perpendicular to AB extended (see Fig. 8.6), how will the trigonometric ratios of $\angle$ A in Δ PAM differ from those of $\angle$ A in Δ CAB or from those of $\angle$ A in Δ QAN?

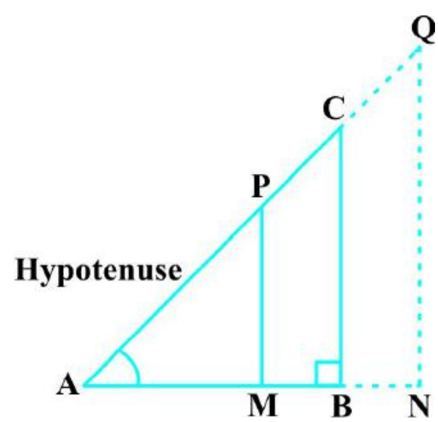


Fig. 8.6

To answer this, first look at these triangles. Is Δ PAM similar to Δ CAB? From Chapter 6, recall the AA similarity criterion. Using the criterion, you will see that the triangles PAM and CAB are similar. Therefore, by the property of similar triangles, the corresponding sides of the triangles are proportional.

So, we have $$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}.$$

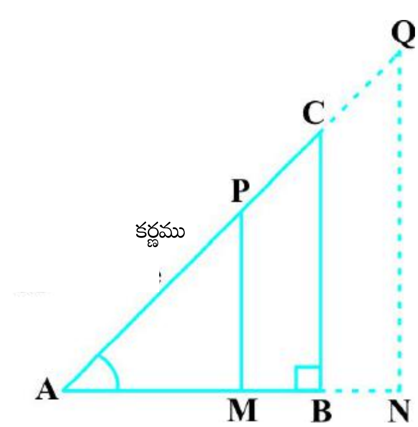
మనం ఈ రోజుల్లో ఉపయోగిస్తున్న ***'sine'*** అనే భావన మొట్టమొదటిసారిగా ప్రస్తావన "ఆర్యభట్ట తన గ్రంథం *ఆర్యభట్టీయం* లో క్రీ.శ. 500లో ఉపయోగించాడు. అర్ధ-జ్యా అనే పదాన్ని జ్యాలో సగాన్ని తెలపడానికి ఆర్యభట్ట ఉపయోగించాడు. అది కాలక్రమేణా జ్యా (***jya***) లేదా జివా (***jiva***)గా కుదించబడింది. *ఆర్యభట్టీయం*ను అరబిక్‌లోకి అనువదించబడినప్పుడు, జివా అనే పదాన్ని అలాగే ఉంచారు. అరబిక్ నుండి లాటిన్‌లోకి అనువాదం చేయబడినప్పుడు వక్రం అనే అర్ధమిచ్చే జివా (***jiva***) అనే పదం సైనస్ (***sinus***) గా మార్చబడింది. ఆ తరువాత యూరప్ అంతటా సైనస్ (***sinus***) అనే పదం సైన్ (***sine***)గా గణిత పరిభాషలో ఉపయోగించడం సాధారణమైపోయింది. ఖగోళ శాస్త్రానికి చెందిన ఆంగ్ల ప్రొఫెసర్ ఎడ్మండ్ గంటర్ (1581 - 1626), మొదటిసారిగా ***'sin'*** అనే సంక్షిప్త సంజ్ఞామానాన్ని ఉపయోగించారు.

ఆర్యభట్ట
క్రీ.శ. 476 – 550

'**cosine**' మరియు '**Tangent**' అనే పదాలు చాలా కాలం తరువాత ఉద్భవించాయి. ***sin*** యొక్క పూరక కోణాలను లెక్కించాల్సి వచ్చినపుడు **cosine** ఏర్పడింది. దానిని ఆర్యభట్ట (కోటి జ్యా) అని ఉపయోగించాడు. **cosine**ని మొట్టమొదటి సారిగా ఎడ్మండ్ గంటర్ ఉపయోగించాడు. 1674 లో సర్ జోనాస్ మూరె అనే ఆంగ్ల గణిత వేత్త **cosine**ను సంక్షిప్తంగా **cos** అని ఉపయోగించాడు.

సూచన : sin A గుర్తును 'కోణం A యొక్క sine' గా ఉపయోగిస్తారు. అంతేకాని sin A అనగా 'sin' మరియు A ల లబ్ధం కాదు. అలాగే Aను సైన్ నుండి వేరు చేస్తే దానికి అర్థం లేదు. అదేవిధంగా cos A అనగా cos మరియు Aల లబ్ధం కాదు. మిగతా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులకు కూడా ఇదే వివరణ వర్తిస్తుంది.

ఇప్పుడు లంబకోణ త్రిభుజం ABC యొక్క కర్ణం మీద P బిందువును తీసుకొనిన, లేదా AC ని పొడిగించి Q అనే బిందువును AB కి లంబంగా PM మరియు AB పొడిగించిన భుజం QN ను (పటం 8.6 చూడండి) తీసుకొనగా, త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు ΔPAM లోని ∠A నుండి Δ CAB యొక్క ∠Aకు లేదా ΔQAN యొక్క ∠Aకు ఎలా మారుతాయి?



పటం 8.6

దీనికి సమాధానం కావాలంటే , ముందు పై మూడు త్రిభుజాలను చూడండి. Δ PAM, Δ CAB కి సరూప త్రిభుజం అవుతుందా? 6వ అధ్యాయం నుండి కో. కో సరూపత నియమం గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఈ సరూపత నియమాన్ని అనుసరించి Δ PAM మరియు Δ CABలు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి. త్రిభుజాల సరూపత నియమాన్ని అనుసరించి వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉంటాయని తెలుస్తుంది.

దీని నుండి $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} \quad \frac{MP}{BC}$ ని పొందుతాం.

From this, we find $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$.

Similarly, $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A$, $\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ and so on.

This shows that the trigonometric ratios of angle A in Δ PAM not differ from those of angle A in Δ CAB.

In the same way, you should check that the value of sin A (and also of other trigonometric ratios) remains the same in Δ QAN also.

From our observations, it is now clear that **the values of the trigonometric ratios of an angle do not vary with the lengths of the sides of the triangle, if the angle remains the same.**

Note : For the sake of convenience, we may write $\sin^2 A$, $\cos^2 A$, etc., in place of $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$, etc., respectively. But cosec A = $(\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (it is called sine inverse A). $\sin^{-1} A$ has a different meaning, which will be discussed in higher classes. Similar conventions hold for the other trigonometric ratios as well. Sometimes, the Greek letter θ (theta) is also used to denote an angle.

We have defined six trigonometric ratios of an acute angle. If we know any one of the ratios, can we obtain the other ratios? Let us see.

If in a right triangle ABC, $\sin A = \frac{1}{3}$, then this means that $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$, i.e., the lengths of the sides BC and AC of the triangle ABC are in the ratio 1 : 3 (see Fig. 8.7). So if BC is equal to k, then AC will be $3k$, where k is any positive number. To determine other

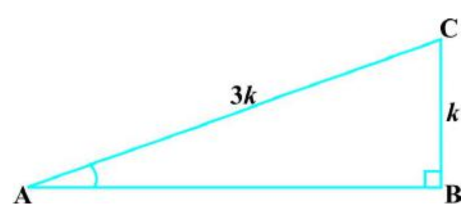


Fig. 8.7

trigonometric ratios for the angle A, we need to find the length of the third side AB. Do you remember the Pythagoras theorem? Let us use it to determine the required length AB.

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

Therefore, $AB = \pm 2\sqrt{2}\,k$

So, we get $AB = 2\sqrt{2}\,k$ (Why is AB not $-2\sqrt{2}\,k$?)

Now, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}\,k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Similarly, you can obtain the other trigonometric ratios of the angle A.

దీని నుండి $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$ ని పొందుతాం.

అదే విధంగా, $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A$, $\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ మొదలైనవి పొందుతాం.

పై దాని నుండి Δ PAM లో $\angle$A యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు, Δ CAB లో $\angle$A విలువలు వేరుకావని తెలుస్తుంది.

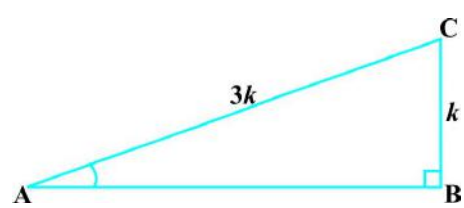
ఇదే విధంగా sin A (ఇతర త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల) విలువ Δ QAN లో కూడా సమానం అని తెలుస్తుంది.

కోణం మారకుండా అలాగే ఉండి, త్రిభుజాల పొడవులు మారినప్పటికీ కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పతుల విలువలు మారవు అని మన పరిశీలనల నుండి స్పష్టంగా తెలుస్తున్నది.

గమనిక: మన సౌలభ్యం కోసం $\sin^2 A$, $\cos^2 A$...మొదలైనవి క్రమంగా $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ మొదలైనవిగా రాసుకోవచ్చు. అంతే కానీ $\operatorname{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (దీనిని sine ఇన్‌వర్స్ A గా పిలుస్తాం) $\sin^{-1} A$ యొక్క భిన్నమైన అర్థాలను మనం పై తరగతులలో చదువుతాం. ఇతర త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులకు కూడా ఇదే వర్తిస్తుంది. కొన్నిసార్లు కోణాన్ని సూచించడానికి మనం గ్రీకు అక్షరం θ (తీటా)ను ఉపయోగిస్తాం.

మనం అల్పకోణం యొక్క ఆరు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను నిర్వచించాము. మనకు ఏదైనా ఒక నిష్పత్తి విలువ తెలిస్తే, దాని నుండి ఇతర నిష్పత్తుల విలువలు తెలుసుకోవచ్చా? చూద్దాం.

ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో, $\sin A = \frac{1}{3}$, అంటే $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$, అనగా త్రిభుజం ABC లో BC మరియు AC భుజాల పొడవులు 1:3 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయని అర్థం. (పటం 8.7 చూడండి) BC విలువ kకు సమానం అయితే AC విలువ $3k$ అవుతుంది. k ఇక్కడ ఏదైనా ఒక ధన సంఖ్య.



పటం 8.7

మనం కోణం A యొక్క మిగతా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు కనుక్కోవాలంటే, త్రిభుజంలోని మూడవ భుజం పొడవును కనుక్కోవాల్సిన అవసరం ఉంది. మీకు పైథాగరస్ సిద్ధాంతం గుర్తుందా? మనం మూడవ భుజం పొడవు ABని కనుక్కోడానికి ఈ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగిద్దాం.

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

కావున, $AB = \pm 2\sqrt{2}\,k$

$AB = 2\sqrt{2}\,k$ ని పొందుతాం (AB అనేది $-2\sqrt{2}\,k$ కాదు. ఎందుకు?)

ఇప్పుడు, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}\,k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ఇదేవిధంగా కోణం A యొక్క అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు కనుక్కోవచ్చు.

Remark : Since the hypotenuse is the longest side in a right triangle, the value of sin A or cos A is always less than 1 (or, in particular, equal to 1).

Let us consider some examples.

Example 1 : Given $\tan A = \frac{4}{3}$, find the other trigonometric ratios of the angle A.

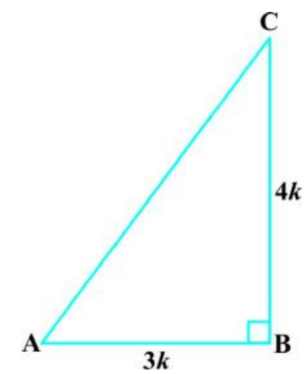


Fig. 8.8

Solution : Let us first draw a right Δ ABC (see Fig 8.8).

Now, we know that $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$.

Therefore, if BC = 4k, then AB = 3k, where k is a positive number.

Now, by using the Pythagoras Theorem, we have

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

So, $\quad AC = 5k$

Now, we can write all the trigonometric ratios using their definitions.

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

Therefore, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$ and $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$.

Example 2 : If ∠ B and ∠ Q are acute angles such that sin B = sin Q, then prove that ∠ B = ∠ Q.

Solution : Let us consider two right triangles ABC and PQR where sin B = sin Q (see Fig. 8.9).

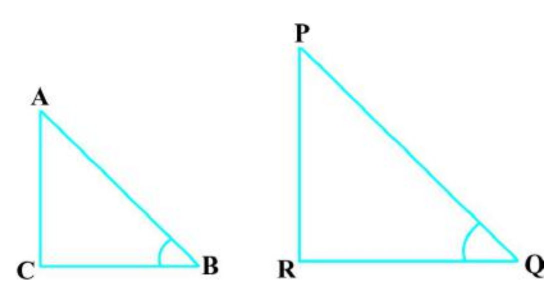


Fig. 8.9

We have $\quad \sin B = \frac{AC}{AB}$

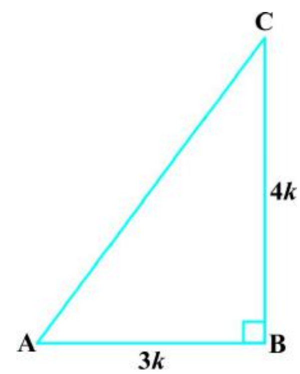
and $\quad \sin Q = \frac{PR}{PQ}$

సూచన : ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం పొడవైన భుజం కాబట్టి sin A లేదా cos A విలువ ఎప్పుడూ 1 కంటే తక్కువగా ఉంటాయి. (లేదా కొన్నిసార్లు 1 కి సమానం).

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : $\tan A = \frac{4}{3}$, అయితే కోణం A యొక్క మిగతా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను కనుక్కోండి.

సాధన : మొదట, Δ ABC లంబకోణ త్రిభుజాన్ని గీద్దాం. (పటం 8.8 చూడండి)



పటం 8.8

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$$ అని మనకు తెలుసు.

కాబట్టి, $BC = 4k$ అయితే $AB = 3k$ అవుతుంది. ఇక్కడ k ఒక ధన సంఖ్య.

ఇప్పుడు, పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించగా,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

$AC = 5k$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు వాటి నిర్వచనాలు ఆధారంగా అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు కింది విధంగా రాయవచ్చు.

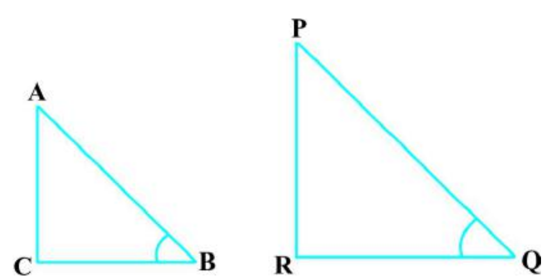
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

అదేవిధంగా, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$ మరియు $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$.

ఉదాహరణ 2 : $\sin B = \sin Q$ అయ్యేటట్లు $\angle B$ మరియు $\angle Q$లు అల్పకోణాలైన $\angle B = \angle Q$ అని చూపండి.

సాధన : $\sin B = \sin Q$ అయ్యేటట్లు రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు ABC మరియు PQR లు ఉన్నాయనుకుందాం (పటం 8.9 చూడండి).



పటం. 8.9

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

మరియు $$\sin Q = \frac{PR}{PQ}$$ అవుతుంది.

Then $$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$$

Therefore, $$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k, \text{ say} \qquad (1)$$

Now, using Pythagoras theorem,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

and $$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

So, $$\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \qquad (2)$$

From (1) and (2), we have

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

Then, by using Theorem 6.4, Δ ACB ~ Δ PRQ and therefore, ∠ B = ∠ Q.

Example 3 : Consider Δ ACB, right-angled at C, in which AB = 29 units, BC = 21 units and ∠ ABC = θ (see Fig. 8.10). Determine the values of

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$,

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$.

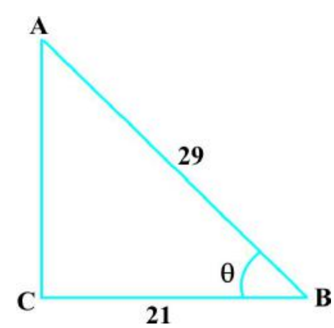


Fig. 8.10

Solution : In Δ ACB, we have

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ units}$$

So, $$\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29},\ \cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}.$$

Now, (i) $$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2 + 21^2}{29^2} = \frac{400 + 441}{841} = 1,$$

and (ii) $$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}.$$

అప్పుడు $$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$$

$$\frac{AC}{PR} = \frac{A\ B}{P\ Q} \qquad k \text{ అనుకోండి.} \qquad (1)$$

ఇప్పుడు, పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

మరియు $$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2} \text{ ని పొందుతాం.}$$

కనుక, $$\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి,

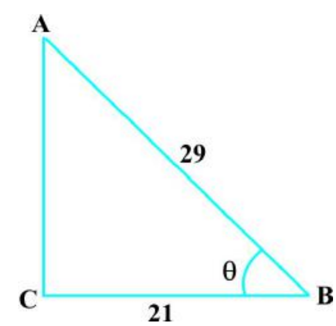
$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

అప్పుడు సిద్ధాంతం 6.4 నుండి $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$ మరియు $\angle B = \angle Q$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 3 : C వద్ద లంబకోణం కలిగిన ఒక ΔACB లో $AB = 29$ యూనిట్లు, $BC = 21$ యూనిట్లు మరియు $\angle ABC = \theta$ అయిన (పటం. 8.10 చూడండి)

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$,

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ విలువలు కనుక్కోండి.



పటం 8.10

సాధన : ΔACB నుండి

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{(29 - 21)(29 \quad 21)} \quad \sqrt{(8)(50)} \quad \sqrt{400} \quad 20 \text{ యూనిట్లు}$$

కావున, $$\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29},\ \cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}.$$

ఇప్పుడు (i) $$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 \quad \left(\frac{21}{29}\right)^2 \quad \frac{20^2 \quad 21^2}{29^2} \quad \frac{400 \quad 441}{841} \quad 1$$

మరియు (ii) $$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$$

Example 4 : In a right triangle ABC, right-angled at B, if tan A = 1, then verify that

2 sin A cos A = 1.

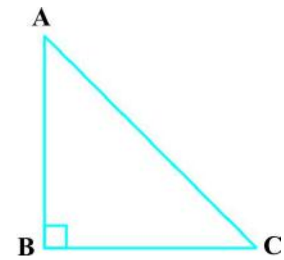


Fig. 8.11

Solution : In Δ ABC, $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (see Fig 8.11)

i.e., $BC = AB$

Let AB = BC = k, where k is a positive number.

Now, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$$

Therefore, $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

So, $2 \sin A \cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$, which is the required value.

Example 5 : In Δ OPQ, right-angled at P, OP = 7 cm and OQ – PQ = 1 cm (see Fig. 8.12). Determine the values of sin Q and cos Q.

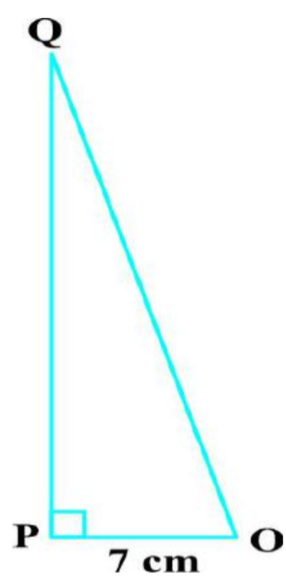


Fig. 8.12

Solution : In Δ OPQ, we have

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

i.e., $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (Why?)

i.e., $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

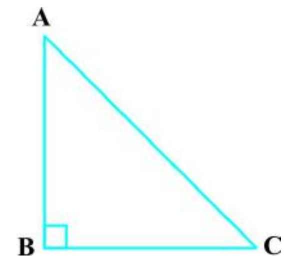
i.e., $1 + 2PQ = 7^2$ (Why?)

i.e., PQ = 24 cm and OQ = 1 + PQ = 25 cm

So, $\sin Q = \frac{7}{25}$ and $\cos Q = \frac{24}{25}$.

ఉదాహరణ 4 : లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో B వద్ద లంబకోణం కలదు. $\tan A = 1$ అయితే

$2 \sin A \cos A = 1$ అని ధృవీకరించండి.



పటం 8.11

సాధన : ΔABC లో, $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (పటం 8.11 నుండి చూడండి)

అనగా, $BC = AB$

$AB = BC = k$ అనుకోండి, ఇక్కడ k ఒక ధన సంఖ్య.

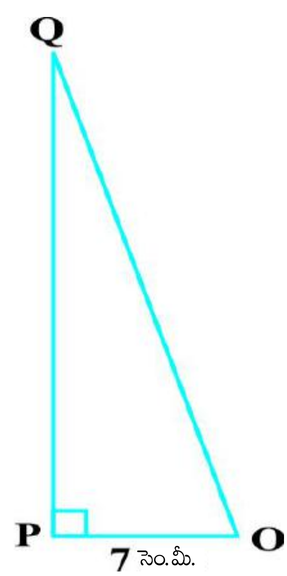
ఇప్పుడు, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$

కావున, $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ మరియు $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

కనుక, $2 \sin A \cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,$ అని నిరూపించబడింది.

ఉదాహరణ 5 : ΔOPQ లో $OP = 7$ సెం.మీ., మరియు $OQ - PQ = 1$ సెం.మీ. అగునట్లు P వద్ద లంబకోణం కలదు. అయిన $\sin Q$ మరియు $\cos Q$ విలువలు కనుక్కోండి.



పటం 8.12

సాధన : ΔOPQ నుండి

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

అనగా, $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (ఎందుకు?)

అనగా, $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

అనగా, $1 + 2PQ = 7^2$ (ఎందుకు?)

అనగా, $PQ = 24$ సెం.మీ, మరియు $OQ = 1 + PQ = 25$ సెం.మీ.

కావున, $\sin Q = \frac{7}{25}$ మరియు $\cos Q = \frac{24}{25}$.

EXERCISE 8.1

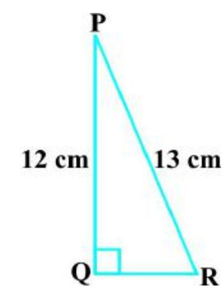


Fig. 8.13

1. In Δ ABC, right-angled at B, AB = 24 cm, BC = 7 cm. Determine :

(i) sin A, cos A

(ii) sin C, cos C

2. In Fig. 8.13, find tan P – cot R.

3. If $\sin A = \frac{3}{4}$, calculate cos A and tan A.

4. Given 15 cot A = 8, find sin A and sec A.

5. Given $\sec \theta = \frac{13}{12}$, calculate all other trigonometric ratios.

6. If ∠ A and ∠ B are acute angles such that cos A = cos B, then show that ∠ A = ∠ B.

7. If $\cot \theta = \frac{7}{8}$, evaluate : (i) $\frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$, (ii) $\cot^2 \theta$

8. If 3 cot A = 4, check whether $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ or not.

9. In triangle ABC, right-angled at B, if $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, find the value of:

(i) sin A cos C + cos A sin C

(ii) cos A cos C – sin A sin C

10. In Δ PQR, right-angled at Q, PR + QR = 25 cm and PQ = 5 cm. Determine the values of sin P, cos P and tan P.

11. State whether the following are true or false. Justify your answer.

(i) The value of tan A is always less than 1.

(ii) $\sec A = \frac{12}{5}$ for some value of angle A.

(iii) cos A is the abbreviation used for the cosecant of angle A.

(iv) cot A is the product of cot and A.

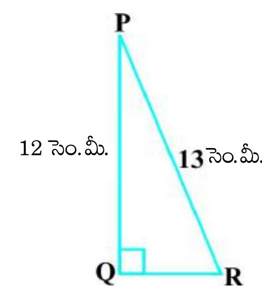
(v) $\sin \theta = \frac{4}{3}$ for some angle θ.

8.3 Trigonometric Ratios of Some Specific Angles

From geometry, you are already familiar with the construction of angles of 30°, 45°, 60° and 90°. In this section, we will find the values of the trigonometric ratios for these angles and, of course, for 0°.

అభ్యాసం 8.1

1. ΔABC లో లంబకోణం B వద్ద ఉంది. మరియు $AB = 24$ సెం.మీ, $BC = 7$ సెం.మీ. అయిన:
   (i) $\sin A, \cos A$
   (ii) $\sin C, \cos C$ ల విలువలు కనుక్కోండి.



పటం 8.13

2. పటం 8.13 లోని $\tan P - \cot R$ విలువ కనుక్కోండి.
3. $\sin A = \frac{3}{4}$, అయిన $\cos A$ మరియు $\tan A$ విలువను కనుక్కోండి.
4. $15 \cot A = 8$ అయిన $\sin A$ మరియు $\sec A$ విలువలను కనుక్కోండి.
5. $\sec \theta = \frac{13}{12}$, అయిన అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను కనుక్కోండి.
6. $\cos A = \cos B$ అయ్యేటట్లు $\angle A$ మరియు $\angle B$ లు అల్పకోణాలు అయితే $\angle A = \angle B$ అని చూపండి.
7. $\cot \theta = \frac{7}{8}$, అయిన (i) $\frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$, (ii) $\cot^2 \theta$ విలువలు కనుక్కోండి.
8. $3 \cot A = 4$ అయిన $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ అవుతుందో లేదో సరి చూడండి?
9. ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో B వద్ద లంబకోణం కలదు. $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ అయిన:
   (i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$
   (ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$ విలువలను కనుక్కోండి
10. ΔPQR లో Q వద్ద లంబకోణం కలదు. $PR + QR = 25$ సెం.మీ. మరియు $PQ = 5$ సెం.మీ. అయిన $\sin P$, $\cos P$ మరియు $\tan P$ ల విలువలను కనుక్కోండి.
11. కింద ఇవ్వబడిన వాక్యాలలో ఏవి సత్యం? ఏవి అసత్యం? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
    (i) $\tan A$ విలువ ఎల్లప్పుడూ 1 కంటే తక్కువ.
    (ii) కోణం A యొక్క ఏదైనా విలువకు $\sec A = \frac{12}{5}$
    (iii) $\cos A$ అనగా కోణం A యొక్క cosec కి సంక్షిప్తరూపం.
    (iv) $\cot A$ అనగా cot మరియు A ల లబ్ధం.
    (v) ఏదైనా ఒక కోణం θ కు $\sin \theta = \frac{4}{3}$ అవుతుంది.

8.3 ప్రత్యేక కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

జ్యామితిలో $30°, 45°, 60°$ మరియు $90°$ కోణాలను ఎలా నిర్మించాలో మీరు ఇప్పటికే తెలుసుకొని ఉన్నారు. ఈ విభాగంలో మనం $0°$తో సహా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు కనుగొంటాం.

Trigonometric Ratios of 45°

In Δ ABC, right-angled at B, if one angle is 45°, then the other angle is also 45°, i.e., $\angle$ A = $\angle$ C = 45° (see Fig. 8.14).

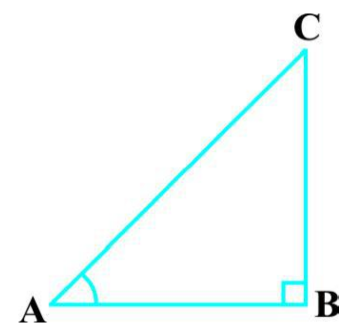


Fig. 8.14

So, BC = AB (Why?)

Now, Suppose BC = AB = a.

Then by Pythagoras Theorem, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$,

and, therefore, $AC = a\sqrt{2}$.

Using the definitions of the trigonometric ratios, we have :

$$\sin 45° = \frac{\text{side opposite to angle } 45°}{\text{hypotenuse}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{side adjacent to angle } 45°}{\text{hypotenuse}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{\text{side opposite to angle } 45°}{\text{side adjacent to angle } 45°} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

Also, $\text{cosec } 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$, $\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$, $\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1$.

Trigonometric Ratios of 30° and 60°

Let us now calculate the trigonometric ratios of 30° and 60°. Consider an equilateral triangle ABC. Since each angle in an equilateral triangle is 60°, therefore, $\angle$ A = $\angle$ B = $\angle$ C = 60°.

Draw the perpendicular AD from A to the side BC (see Fig. 8.15).

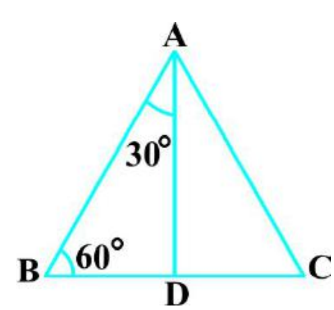


Fig. 8.15

Now $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (Why?)

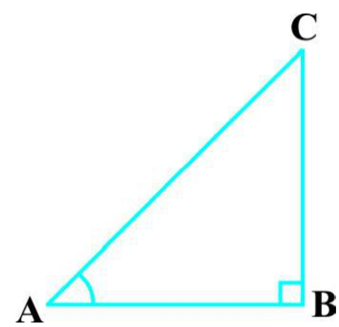
Therefore, BD = DC

and $\angle$ BAD = $\angle$ CAD (CPCT)

Now observe that:

Δ ABD is a right triangle, right-angled at D with $\angle$ BAD = 30° and $\angle$ ABD = 60° (see Fig. 8.15).

45° యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు



పటం 8.14

B వద్ద లంబకోణం కలిగిన Δ ABC లో ఒక కోణం 45°, అయిన మరొక కోణం విలువ కూడా 45° అవుతుంది. అనగా $\angle A = \angle C = 45^\circ$ (పటం 8.14 చూడండి).

కాబట్టి, $BC = AB$ (ఎందుకు?)

ఇప్పుడు, $BC = AB = a$ అనుకోండి.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$,

మరియు, $AC = a\sqrt{2}$

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల నిర్వచనాలను ఉపయోగిస్తే :

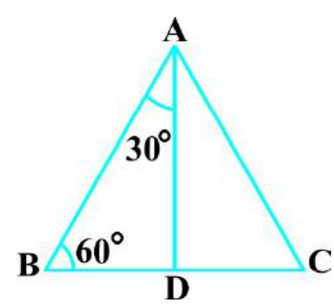
$$\sin 45^\circ = \frac{45^\circ\text{కోణం యొక్క ఎదుటి భుజం పొడవు}}{\text{కర్ణం}} \quad \frac{BC}{AC} \quad \frac{a}{a\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{45^\circ\text{కోణం యొక్క ఆసన్న భుజం పొడవు}}{\text{కర్ణం}} \quad \frac{AB}{AC} \quad \frac{a}{a\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{45^\circ\text{కోణం యొక్క ఎదుటి భుజం పొడవు}}{45^\circ\text{కోణం యొక్క ఆసన్న భుజం పొడవు}} \quad \frac{BC}{AB} \quad \frac{a}{a} \quad 1$$

అదేవిధంగా, $\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$, $\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$, $\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$

30° మరియు 60°ల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు



పటం 8.15

ఇక మనం 30° మరియు 60°ల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను కనుక్కొందాం. ఒక సమబాహు త్రిభుజం ABC ని తీసుకుందాం. సమబాహు త్రిభుజంలో ప్రతి కోణం 60° కావున, $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ అవుతుంది.

BC భుజానికి A నుండి లంబం AD ని గీయండి (పటం 8.15 చూడండి).

ఇప్పుడు $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ఎందుకు?)

కావున, $BD = DC$

మరియు $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

D వద్ద లంబకోణాన్ని ఏర్పరుస్తూ, $\angle BAD = 30^\circ$ మరియు $\angle ABD = 60^\circ$ అయితే Δ ABD ఒక లంబకోణ త్రిభుజం అని గమనించండి. (పటం. 8.15 చూడండి).

As you know, for finding the trigonometric ratios, we need to know the lengths of the sides of the triangle. So, let us suppose that AB = $2a$.

Then, $$BD = \frac{1}{2}BC = a$$

and $$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2,$$

Therefore, $$AD = a\sqrt{3}$$

Now, we have :

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},\ \cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also, $$\operatorname{cosec} 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2,\quad \sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}.$$

Similarly,

$$\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60° = \frac{1}{2},\ \tan 60° = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{cosec} 60° = \frac{2}{\sqrt{3}},\ \sec 60° = 2 \text{ and } \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Trigonometric Ratios of 0° and 90°

Let us see what happens to the trigonometric ratios of angle A, if it is made smaller and smaller in the right triangle ABC (see Fig. 8.16), till it becomes zero. As $\angle$A gets smaller and smaller, the length of the side BC decreases. The point C gets closer to point B, and finally when $\angle$A becomes very close to 0°, AC becomes almost the same as AB (see Fig. 8.17).

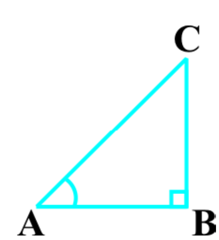


Fig. 8.16

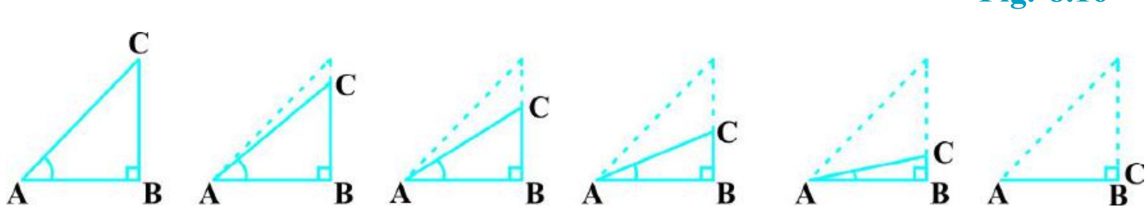


Fig. 8.17

మనం త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు కనుక్కోవాలంటే త్రిభుజం యొక్క భుజాల పొడవులు తెలుసుకోవాలని మీకు తెలుసు. కావున, $AB = 2a$ అనుకోండి.

అప్పుడు, $$BD = \frac{1}{2}BC = a \text{ అగును.}$$

మరియు $$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2,$$

కావున, $$AD = a\sqrt{3}$$

ఇప్పుడు,

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ అని పొందుతాం.}$$

ఇదే విధంగా, $$\operatorname{cosec} 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2, \quad \sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

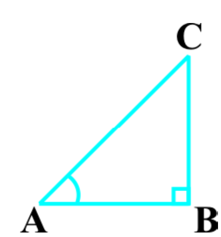
$$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3} \text{ అని పొందుతాం.}$$

ఇదేవిధంగా,

$$\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}, \tan 60° = \sqrt{3},$$

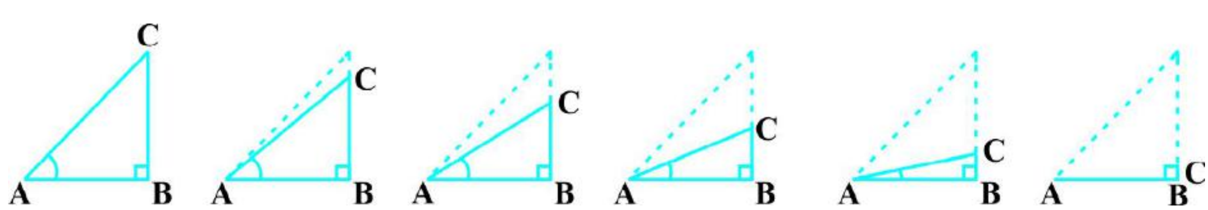
$$\operatorname{cosec} 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60° = 2 \text{ మరియు } \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$0°$ మరియు $90°$ ల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు



పటం 8.16

లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో A యొక్క కోణాన్ని క్రమంగా తగ్గిస్తూ చివరకు సున్నా అయ్యే వరకు తగ్గిస్తే త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు ఎలా మారుతాయో చూద్దాం. ఇలా తగ్గిస్తూ పోతే $\angle A$ యొక్క విలువ మరింత చిన్నగా అవుతూ మరియు BC భుజం పొడవు కూడా తగ్గుతుంది. అలాగే బిందువు C, బిందువు B వద్దకు చేరుతుంటే $\angle A$ విలువ $0°$ కు దగ్గర అవుతుంది. AC విలువ దాదాపు AB కి సమానం అవుతుంది. (పటం. 8.17 చూడండి.)



పటం 8.17

When $\angle$ A is very close to 0°, BC gets very close to 0 and so the value of $\sin A = \frac{BC}{AC}$ is very close to 0. Also, when $\angle$ A is very close to 0°, AC is nearly the same as AB and so the value of $\cos A = \frac{AB}{AC}$ is very close to 1.

This helps us to see how we can define the values of sin A and cos A when A = 0°. We define : **sin 0° = 0 and cos 0° = 1.**

Using these, we have :

$$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0, \ \cot 0° = \frac{1}{\tan 0°}, \text{ which is not defined. (Why?)}$$

$$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1 \text{ and cosec } 0° = \frac{1}{\sin 0°}, \text{ which is again not defined.(Why?)}$$

Now, let us see what happens to the trigonometric ratios of $\angle$ A, when it is made larger and larger in Δ ABC till it becomes 90°. As $\angle$ A gets larger and larger, $\angle$ C gets smaller and smaller. Therefore, as in the case above, the length of the side AB goes on decreasing. The point A gets closer to point B. Finally when $\angle$ A is very close to 90°, $\angle$ C becomes very close to 0° and the side AC almost coincides with side BC (see Fig. 8.18).

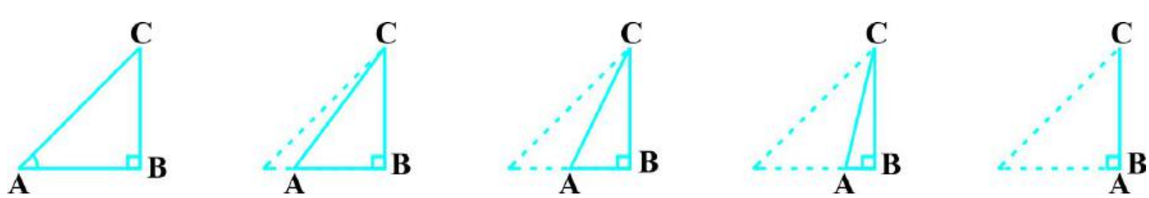


Fig. 8.18

When $\angle$ C is very close to 0°, $\angle$ A is very close to 90°, side AC is nearly the same as side BC, and so sin A is very close to 1. Also when $\angle$ A is very close to 90°, $\angle$ C is very close to 0°, and the side AB is nearly zero, so cos A is very close to 0.

So, we define : **sin 90° = 1 and cos 90° = 0.**

Now, why don't you find the other trigonometric ratios of 90°?

We shall now give the values of all the trigonometric ratios of 0°, 30°, 45°, 60° and 90° in Table 8.1, for ready reference.

$\angle A$ విలువ 0° లకు దగ్గరగా వచ్చినప్పుడు, BC విలువ కూడా 0 కు సమానం అవుతుంది. మరియు $\sin A = \frac{BC}{AC}$ విలువ కూడా 0 కు సమానం అవుతుంది. అలాగే $\angle A$ విలువ సున్నాకు దగ్గరైతే, AC విలువ దాదాపు AB కి సమానం మరియు $\cos A = \frac{AB}{AC}$ విలువ దాదాపు 1 కి సమానం.

$A = 0^\circ$లు అయినప్పుడు $\sin A$ మరియు $\cos A$ విలువ ఎలా తెలుసుకోవడానికి ఇది సహాయపడుతుంది.

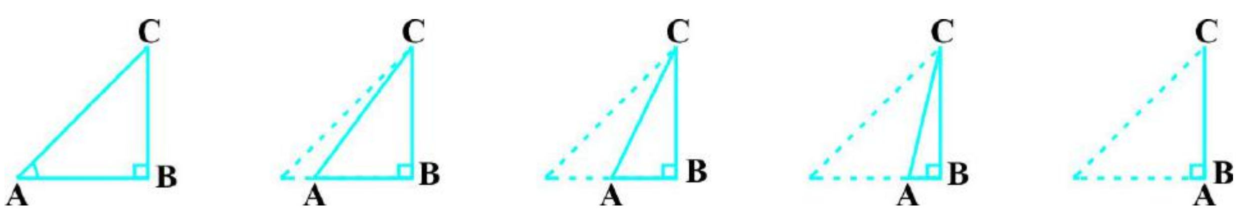
$\mathbf{\sin 0^\circ = 0}$ మరియు $\mathbf{\cos 0^\circ = 1}$ అని నిర్వచించవచ్చు.

దీనిని ఉపయోగించి :

$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = 0$ కానీ $\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ}$, ను నిర్వచించలేం. (ఎందుకు?)

$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = 1$ కానీ $\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ}$, ను నిర్వచించలేం. (ఎందుకు?)

ΔABC లో $\angle A$ యొక్క విలువను క్రమంగా పెంచుతూ పోతే దాని విలువ 90° కు సమానం అవుతుంది, అప్పుడు $\angle A$ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువ ఎలా ఉంటాయో ఇప్పుడు చూద్దాం! $\angle A$ క్రమంగా పెరుగుతూ ఉంటే $\angle C$ విలువ క్రమంగా తగ్గుతూ ఉంటుంది. బిందువు A, బిందువు B కి దగ్గరవుతుంది, చివరికి $\angle A$ విలువ 90° చేరువవుతూ $\angle C$ విలువ 0° లకు చేరువవుతుంది మరియు భుజం AC, భుజం BC తో ఏకీభవిస్తుంది (పటం 8.18 చూడండి).



పటం 8.18

$\angle C$ విలువ 0° లకు చేరువ అవుతుంటే $\angle A$ విలువ 90° లకు చేరువవుతుంది. భుజం AC, భుజం BCకి సమానం అవుతుంది. మరియు $\sin A$ విలువ 1కి దగ్గరవుతుంది అలాగే $\angle A$ విలువ దాదాపు 90° లకు చేరుకుంటుంది. $\angle C$ దాదాపుగా 0° లకు చేరుకుంటుంది మరియు భుజం AB పొడవు దాదాపుగా శూన్యం అవుతుంది మరియు $\cos A$ విలువ 0 కు చేరుకుంటుంది.

దీని నుండి : $\mathbf{\sin 90^\circ = 1}$ మరియు $\mathbf{\cos 90^\circ = 0}$ అని నిర్వచించవచ్చు.

ఇప్పుడు మీరు 90° కోణానికి మిగతా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు ఎందుకు కనుక్కోకూడదు?

ఇప్పుడు మనం, త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ మరియు 90° యొక్క అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను పట్టిక 8.1 లో పొందుపరుద్దాం.

Table 8.1

∠ A	0°	30°	45°	60°	90°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Not defined
cosec A	Not defined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	Not defined
cot A	Not defined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Remark : From the table above you can observe that as ∠ A increases from 0° to 90°, sin A increases from 0 to 1 and cos A decreases from 1 to 0.

Let us illustrate the use of the values in the table above through some examples.

Example 6 : In Δ ABC, right-angled at B, AB = 5 cm and ∠ ACB = 30° (see Fig. 8.19). Determine the lengths of the sides BC and AC.

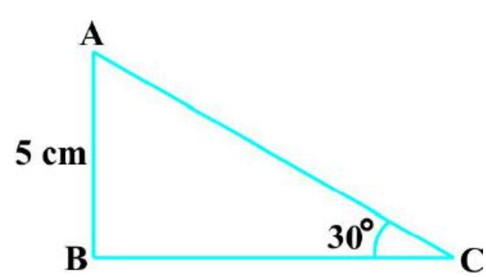


Fig. 8.19

Solution : To find the length of the side BC, we will choose the trigonometric ratio involving BC and the given side AB. Since BC is the side adjacent to angle C and AB is the side opposite to angle C, therefore

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

i.e.,
$$\frac{5}{BC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

which gives
$$BC = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

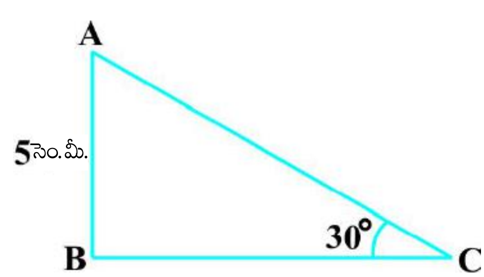
పట్టిక 8.1

∠ A	0°	30°	45°	60°	90°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచించబడదు
cosec A	నిర్వచించబడదు	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	నిర్వచించబడదు
cot A	నిర్వచించబడదు	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

సూచన : ∠ A యొక్క విలువ 0° ల నుండి 90° లకు పెరిగేటప్పుడు sin A విలువ 0 నుండి 1 కి పెరిగినట్లుగా మరియు cos A విలువ 1 నుండి 0 కి తగ్గినట్లుగా మనం గమనించవచ్చు.

పై పట్టికలోని విలువల ఉపయోగాన్ని కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా చర్చిద్దాం.

ఉదాహరణ 6 : B వద్ద లంబకోణం కలిగిన Δ ABC లో AB = 5 సెం.మీ. మరియు ∠ ACB = 30° అయిన (పటం. 8.19 చూడండి) BC మరియు AC భుజాల పొడవులు కనుక్కోండి?



పటం 8.19

సాధన : BC భుజం పొడవును కనుగొనడానికి భుజాలు BC మరియు AB లతో కూడిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని ఎంచుకుంటాం. BC భుజం, ఇచ్చిన కోణం C కి ఆసన్నభుజం మరియు భుజం AB ఎదుటి భుజం అవుతుంది కాబట్టి,

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

అనగా, $$\frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

దీని నుండి, $$BC = 5\sqrt{3} \text{ సెం.మీ.}$$

To find the length of the side AC, we consider

$$\sin 30° = \frac{AB}{AC} \qquad \text{(Why?)}$$

i.e., $\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

i.e., $AC = 10$ cm

Note that alternatively we could have used Pythagoras theorem to determine the third side in the example above,

i.e., $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}$ cm $= 10$ cm.

Example 7 : In Δ PQR, right-angled at Q (see Fig. 8.20), PQ = 3 cm and PR = 6 cm. Determine ∠ QPR and ∠ PRQ.

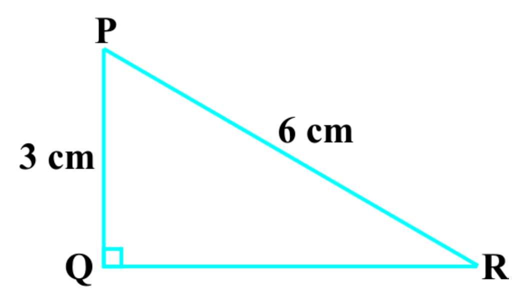


Fig. 8.20

Solution : Given PQ = 3 cm and PR = 6 cm.

Therefore, $\frac{PQ}{PR} = \sin R$

or $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

So, ∠ PRQ = 30°

and therefore, ∠ QPR = 60°. (Why?)

You may note that if one of the sides and any other part (either an acute angle or any side) of a right triangle is known, the remaining sides and angles of the triangle can be determined.

Example 8 : If $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$, $0° < A + B \le 90°$, $A > B$, find A and B.

Solution : Since, $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$, therefore, $A - B = 30°$ (Why?) (1)

Also, since $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$, therefore, $A + B = 60°$ (Why?) (2)

Solving (1) and (2), we get : $A = 45°$ and $B = 15°$.

AC భుజం పొడవును క్రింది విధంగా కనుక్కోవచ్చు.

$$\sin 30° = \frac{AB}{AC} \qquad \text{(ఎందుకు?)}$$

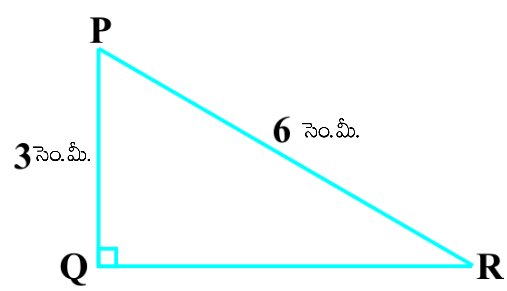
అనగా, $\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

అనగా, $AC = 10$ సెం.మీ.

పై ఉదాహరణలో మూడో భుజాన్ని కనుగొనడానికి ప్రత్యామ్నాయంగా పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించవచ్చని గమనించండి,

అనగా, $AC = \sqrt{AB^2 \quad BC^2} \quad \sqrt{5^2 \quad (5\sqrt{3})^2}$ సెం.మీ. $= 10$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 7 : ΔPQR లో Q వద్ద లంబకోణం కలదు (పటం. 8.20 చూడండి). $PQ = 3$ సెం.మీ. $PR = 6$ సెం. మీ. అయిన $\angle QPR$ మరియు $\angle PRQ$ విలువలను కనుక్కోండి.



పటం 8.20

సాధన : దత్తాంశం $PQ = 3$ సెం.మీ మరియు $PR = 6$ సెం.మీ.

కాబట్టి, $\frac{PQ}{PR} = \sin R$

లేదా $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

కాబట్టి, $\angle PRQ = 30°$

మరియు, $\angle QPR = 60°.$ (ఎందుకు?)

ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో ఏదైనా ఒక భుజం మరియు ఇంకొక భాగం (అల్ప కోణం లేదా ఏదైనా భుజం) తెలిసినట్లయితే ఆ త్రిభుజం యొక్క మిగిలిన భుజాలు మరియు కోణాలను నిర్ణయించవచ్చని మనం గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ 8 : $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, $0° < A + B \le 90°$, $A > B$, అయితే A , B విలువలు కనుక్కోండి.

సాధన : $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, కాబట్టి, $A - B = 30°$ (ఎందుకు?) (1)

అదేవిధంగా, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, కాబట్టి, $A + B = 60°$ (ఎందుకు?) (2)

(1), (2) లను సాధించగా మనకు $A = 45°$ మరియు $B = 15°$ లను పొందుతాం.

EXERCISE 8.2

1. Evaluate the following :

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$ (ii) $2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

(iii) $\dfrac{\cos 45°}{\sec 30° + \operatorname{cosec} 30°}$ (iv) $\dfrac{\sin 30° + \tan 45° - \operatorname{cosec} 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

2. Choose the correct option and justify your choice :

(i) $\dfrac{2\tan 30°}{1+\tan^2 30°} =$

(A) $\sin 60°$ (B) $\cos 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°} =$

(A) $\tan 90°$ (B) 1 (C) $\sin 45°$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2 \sin A$ is true when $A =$

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\dfrac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°} =$

(A) $\cos 60°$ (B) $\sin 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

3. If $\tan (A+B) = \sqrt{3}$ and $\tan (A-B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A + B \le 90°$; $A > B$, find A and B.

4. State whether the following are true or false. Justify your answer.

(i) $\sin (A+B) = \sin A + \sin B$.

(ii) The value of $\sin \theta$ increases as θ increases.

(iii) The value of $\cos \theta$ increases as θ increases.

(iv) $\sin \theta = \cos \theta$ for all values of θ.

(v) $\cot A$ is not defined for $A = 0°$.

అభ్యాసం 8.2

1. ఈ క్రింది వాటి విలువలు కనుక్కోండి :

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$ (ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $\dfrac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$ (iv) $\dfrac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. సరైన సమాధానాన్ని ఎంచుకొని మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి :

(i) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} =$

(A) $\sin 60^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ} =$

(A) $\tan 90^\circ$ (B) 1 (C) $\sin 45^\circ$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$ సత్యమైతే, $A =$

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} =$

(A) $\cos 60^\circ$ (B) $\sin 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

3. $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ మరియు $\tan(A-B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $0^\circ < A+B \le 90^\circ$; $A > B$, అయితే A మరియు B లను కనుక్కోండి.

4. ఈ కిందివి సత్యాలో, అసత్యాలో తెలపండి. మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

(i) $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

(ii) θ విలువ పెరిగితే $\sin\theta$ విలువ కూడా పెరుగుతుంది.

(iii) θ విలువ పెరిగితే $\cos\theta$ విలువ కూడా పెరుగుతుంది.

(iv) θ యొక్క అన్ని విలువలకు $\sin\theta = \cos\theta$ అవుతుంది.

(v) $A = 0^\circ$ అయినప్పుడు $\cot A$ యొక్క విలువ నిర్వచింపలేము.

8.4 Trigonometric Identities

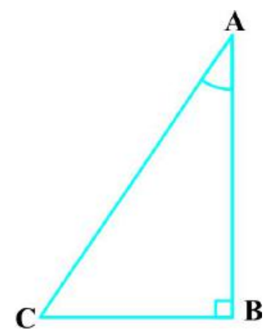


Fig. 8.21

You may recall that an equation is called an identity when it is true for all values of the variables involved. Similarly, an equation involving trigonometric ratios of an angle is called a **trigonometric identity,** if it is true for all values of the angle(s) involved.

In this section, we will prove one trigonometric identity, and use it further to prove other useful trigonometric identities.

In Δ ABC, right-angled at B (see Fig. 8.21), we have:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$$

Dividing each term of (1) by AC^2, we get

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

i.e., $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

i.e., $$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

i.e., $$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1} \qquad (2)$$

This is true for all A such that $0° \leq A \leq 90°$. So, this is a trigonometric identity.

Let us now divide (1) by AB^2. We get

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

or, $$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

i.e., $$\mathbf{1 + \tan^2 A = \sec^2 A} \qquad (3)$$

Is this equation true for $A = 0°$? Yes, it is. What about $A = 90°$? Well, tan A and sec A are not defined for $A = 90°$. So, (3) is true for all A such that $0° \leq A < 90°$.

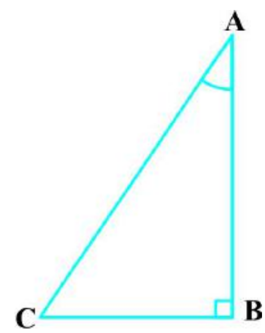
Let us see what we get on dividing (1) by BC^2. We get

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

8.4 త్రికోణమితీయ సర్వ సమీకరణాలు

చరరాశుల అన్ని విలువలకు ఒక గణిత సమీకరణం సత్యమైతే ఆ సమీకరణాన్ని సర్వ సమీకరణం అంటారు. ఇదే విధంగా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల ప్రమేయం గల అన్ని కోణాలకు సత్యం అయితే త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల ఆధారంగా ఏర్పడిన సర్వసమీకరణాన్ని "త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణం" అంటారు.

ఇక్కడ మనము ఒక త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాన్ని ఉత్పాదించి, దీనిని ఉపయోగించి మిగతా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను నిరూపిద్దాం.



పటం 8.21

B వద్ద లంబకోణం కలిగిన Δ ABC లో (పటం 8.21 చూడండి):

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$$

సమీకరణం (1) లోని అన్ని పదాలను AC^2 చే భాగించగా

మనకు $\dfrac{AB^2}{AC^2} + \dfrac{BC^2}{AC^2} = \dfrac{AC^2}{AC^2}$ వస్తుంది.

అనగా, $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

అనగా, $$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

అనగా, $$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1} \qquad (2)$$

ఈ సమీకరణం $0° \le A \le 90°$ అగుచూ, A యొక్క అన్ని విలువలకు ఇది సత్యం అవుతుంది. కావున ఇది ఒక త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణం. ఇప్పుడు మరల సమీకరణం (1) ని AB^2 చే భాగించగా, మనకు

$\dfrac{AB^2}{AB^2} + \dfrac{BC^2}{AB^2} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$ వస్తుంది.

లేదా, $$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

అనగా, $$\mathbf{1 + \tan^2 A = \sec^2 A} \qquad (3)$$

$A = 0°$ అయినపుడు ఈ సమీకరణం సత్యం అవుతుందా? అవును, అవుతుంది. $A = 90°$ అయినప్పుడు tan A, sec A విలువలు నిర్వచింపబడలేదు. కాబట్టి $0° \le A < 90°$ అగుచూ, A యొక్క అన్ని విలువలకు (3) సత్యం అవుతుంది. సమీకరణం (3) అనేది $0° \le A < 90°$ అగుచూ, A యొక్క అన్ని విలువలకు సత్యం అవుతుంది.

(1) ని BC^2 చే మనం భాగించినపుడు ఏం అవుతుందో గమనిద్దాం.

$\dfrac{AB^2}{BC^2} + \dfrac{BC^2}{BC^2} = \dfrac{AC^2}{BC^2}$ ని పొందుతాం.

i.e., $$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

i.e., $$\mathbf{cot^2 A + 1 = cosec^2 A} \qquad (4)$$

Note that cosec A and cot A are not defined for A = 0°. Therefore (4) is true for all A such that 0° < A ≤ 90°.

Using these identities, we can express each trigonometric ratio in terms of other trigonometric ratios, i.e., if any one of the ratios is known, we can also determine the values of other trigonometric ratios.

Let us see how we can do this using these identities. Suppose we know that $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Then, $\cot A = \sqrt{3}$.

Since, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, and $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Again, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. Therefore, cosec A = 2.

Example 9 : Express the ratios cos A, tan A and sec A in terms of sin A.

Solution : Since $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, therefore,

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A, \text{ i.e., } \cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$$

This gives $$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} \qquad \text{(Why?)}$$

Hence, $$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \text{ and } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

Example 10 : Prove that sec A (1 – sin A)(sec A + tan A) = 1.

Solution :

$$\text{LHS} = \sec A\,(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

అనగా, $$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

అనగా, $$\mathbf{cot^2 A + 1 = cosec^2 A} \qquad (4)$$

$A = 0°$ అయినప్పుడు cosec A మరియు cot A నిర్వచింపబడలేదని గమనించండి. కాబట్టి, $0° < A \le 90°$ అగుచూ, A యొక్క అన్ని విలువలకు (4) ఇది సత్యం అవుతుంది.

ఈ సర్వ సమీకరణాలను ఉపయోగించి, మనం ప్రతి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని మరొక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి రూపంలో సూచించవచ్చు. అనగా మనకు ఒక కోణం యొక్క నిష్పత్తి తెలిస్తే, మిగిలిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను కూడా కనుక్కోవచ్చు.

ఈ సర్వ సమీకరణాలను ఉపయోగించి కొన్ని విలువలను పరిశీలిద్దాం.

$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$. అయితే, $\cot A = \sqrt{3}$ అవుతుంది.

కావున, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, మరియు $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

మరల, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. కావున $\text{cosec } A = 2$.

ఉదాహరణ 9 : cos A, tan A మరియు sec A నిష్పత్తులను sin A పరంగా వ్యక్తపరచండి.

సాధన : Since $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, కాబట్టి,

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A, \text{ అనగా, } \cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} \text{ అని పొందవచ్చు} \qquad \text{(ఎందుకు?)}$$

కావున, $$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \text{ మరియు } \sec A = \frac{1}{\cos A} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

ఉదాహరణ 10 : $\sec A(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$ అని నిరూపించండి.

సాధన :

$$\text{LHS} = \sec A(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{RHS}$$

Example 11 : Prove that $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

Solution : LHS $= \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{RHS}$$

Example 12 : Prove that $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$, using the identity $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$.

Solution : Since we will apply the identity involving $\sec\theta$ and $\tan\theta$, let us first convert the LHS (of the identity we need to prove) in terms of $\sec\theta$ and $\tan\theta$ by dividing numerator and denominator by $\cos\theta$.

$$\text{LHS} = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{RHS}$$

ఉదాహరణ 11 : $\dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\text{LHS} = \dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\dfrac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$= \frac{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{RHS}$$

ఉదాహరణ 12 : సర్వసమీకరణం $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ ను ఉపయోగించి, $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$, అని నిరూపించండి.

సాధన : $\sec\theta$ మరియు $\tan\theta$ సర్వసమానత్వాన్ని అన్వయించి, LHS (మనం నిరూపించాల్సిన సర్వసమానత్వం) ను $\sec\theta$ మరియు $\tan\theta$ పదాలలోకి మార్చడం కోసం, లవంలోని పదాల్ని, హారంలోని పదాల్ని $\cos\theta$ చే భాగిస్తాం.

$$\text{LHS} = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta},$$

which is the RHS of the identity, we are required to prove.

EXERCISE 8.3

1. Express the trigonometric ratios sin A, sec A and tan A in terms of cot A.

2. Write all the other trigonometric ratios of ∠ A in terms of sec A.

3. Choose the correct option. Justify your choice.

(i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A =$

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

(A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

(iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} =$

(A) $\sec^2 A$ (B) –1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

4. Prove the following identities, where the angles involved are acute angles for which the expressions are defined.

(i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ (ii) $\dfrac{\cos A}{1 + \sin A} + \dfrac{1 + \sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} = 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

[**Hint :** Write the expression in terms of sin θ and cos θ]

(iv) $\dfrac{1 + \sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$ [**Hint :** Simplify LHS and RHS separately]

(v) $\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$, using the identity $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$.

(vi) $\sqrt{\dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$ (vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta},$$

ఇదే మనం నిరూపించవలసిన RHS యొక్క సర్వసమానత్వం

అభ్యాసం 8.3

1. త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు sin A, sec A మరియు tan A ల విలువలను cot A పరంగా వ్యక్తపరచండి.

2. sec A పరంగా ∠A యొక్క అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను నిర్వచించండి.

3. సరైన సమాధానాన్ని గుర్తించండి. మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

(i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A =$

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

(A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} =$

(A) $\sec^2 A$ (B) –1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

4. ఇక్కడ నిర్వచించబడిన సమీకరణాలలోని కోణాలన్నీ అల్పకోణాలైతే, కింది సమీకరణాలు సర్వసమీకరణాలని నిరూపించండి.

(i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ (ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

[**సూచన :** సమీకరణాన్ని sin θ, cos θ పదాలలోనికి మార్చండి.]

(iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ [**సూచన :** LHS మరియు RHS లను వేర్వేరుగా సూక్ష్మీకరించండి.]

(v) $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$, $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించండి.

(vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ (vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\text{cosec A} - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[**Hint :** Simplify LHS and RHS separately]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.5 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. In a right triangle ABC, right-angled at B,

$$\sin A = \frac{\text{side opposite to angle A}}{\text{hypotenuse}}, \cos A = \frac{\text{side adjacent to angle A}}{\text{hypotenuse}}$$

$$\tan A = \frac{\text{side opposite to angle A}}{\text{side adjacent to angle A}}.$$

2. $\text{cosec A} = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$.

3. If one of the trigonometric ratios of an acute angle is known, the remaining trigonometric ratios of the angle can be easily determined.

4. The values of trigonometric ratios for angles 0°, 30°, 45°, 60° and 90°.

5. The value of sin A or cos A never exceeds 1, whereas the value of sec A or cosec A is always greater than or equal to 1.

6. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ for $0° \le A < 90°$,

$\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ for $0° < A \le 90°$.

(ix) $(\text{cosec A} - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[**సూచన:** LHS, RHS లను వేర్వేరుగా సూక్ష్మీకరించండి]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.5 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మనం ఈ కింది విషయాలను చర్చించాము :

1. B వద్ద లంబకోణం కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో

$$\sin A = \frac{\text{కోణం A కు ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}},\ \cos A = \frac{\text{కోణం A కు ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}}$$

$$\tan A = \frac{\text{కోణం A కు ఎదుటి భుజం}}{\text{కోణం A కు ఆసన్న భుజం}}.$$

2. $\text{cosec A} = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$.

3. అల్ప కోణం యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో ఒక నిష్పత్తి తెలిసినట్లయితే, ఆ కోణం యొక్క మిగిలిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను కూడా కనుక్కోవచ్చు.

4. $0°, 30°, 45°, 60°$ మరియు $90°$ కోణాలకు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు

5. sin A లేదా cos A విలువలు ఎప్పటికీ 1 కంటే తక్కువగాను లేదా సమానంగా ఉంటాయి. కానీ sec A లేదా cosec A విలువలు ఎప్పటికీ 1 కంటే ఎక్కువగాను లేదా సమానంగా ఉంటాయి.

6. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,

   $0° \le A < 90°$ అయినప్పుడు $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

   $0° < A \le 90°$ అయినప్పుడు $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$

1062CH09

SOME APPLICATIONS OF TRIGONOMETRY 9

9.1 Heights and Distances

In the previous chapter, you have studied about trigonometric ratios. In this chapter, you will be studying about some ways in which trigonometry is used in the life around you.

Let us consider Fig. 8.1 of prvious chapter, which is redrawn below in Fig. 9.1.

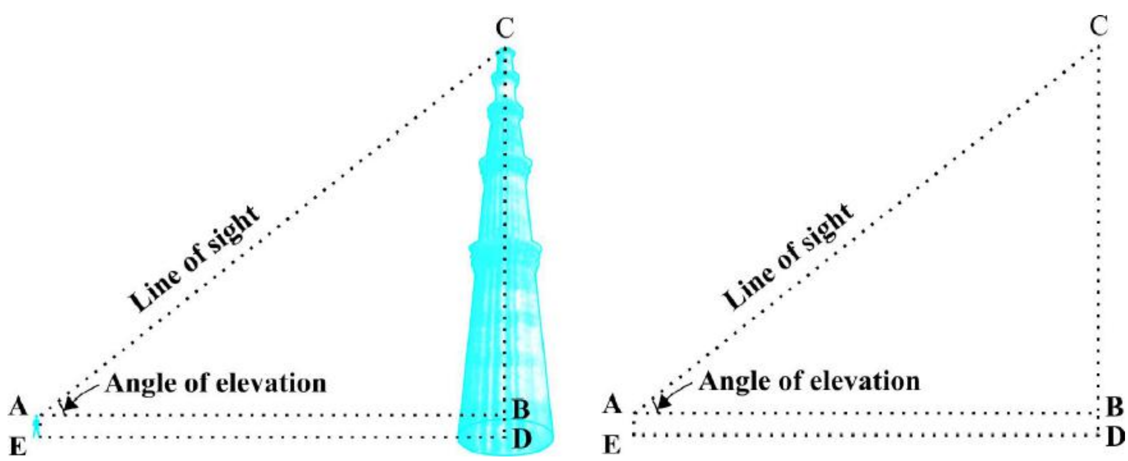


Fig. 9.1

In this figure, the line AC drawn from the eye of the student to the top of the minar is called the *line of sight*. The student is looking at the top of the minar. The angle BAC, so formed by the line of sight with the horizontal, is called the *angle of elevation* of the top of the minar from the eye of the student.

Thus, the **line of sight** is the line drawn from the eye of an observer to the point in the object viewed by the observer. The **angle of elevation** of the point viewed is

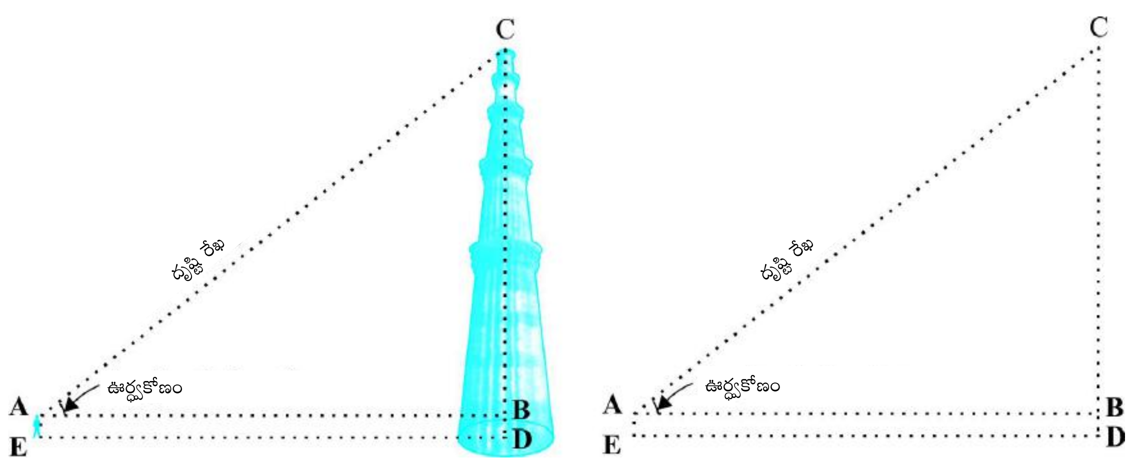
1062CH09

త్రికోణమితి యొక్క అనువర్తనాలు 9

9.1 ఎత్తులు మరియు దూరాలు

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను గూర్చి మనం గత అధ్యాయంలో నేర్చుకున్నాము. ఈ అధ్యాయంలో మీరు త్రికోణమితిని మీ చుట్టూ ఉన్న కొన్ని నిత్యజీవిత సందర్భాల్లో ఎలా ఉపయోగించాలో తెలుసుకుందాం.

గత అధ్యాయంలోని పటం 8.1 ని మరల పటం 9.1గా గీద్దాము.



పటం 9.1

ఈ పటంలో విద్యార్థి మినార్ పై భాగాన్ని చూస్తున్నాడు. విద్యార్థి కంటి నుండి మినార్ పై భాగాన్ని కలుపుతూ గీసిన AC రేఖను దృష్టి రేఖ అంటాము. దృష్టి రేఖ, క్షితిజ సమాంతర రేఖతో చేసిన కోణం BAC ను విద్యార్థి కంటి నుండి మినార్‌పై భాగాన్ని చూసే ***ఊర్ధ్వ కోణం*** అంటారు.

కనుక, పరిశీలకుని కంటి నుండి వస్తువులో పరిశీలకుడు చూసే బిందువుకు గీచిన రేఖను **'దృష్టి రేఖ'** అంటారు.

the angle formed by the line of sight with the horizontal when the point being viewed is above the horizontal level, i.e., the case when we raise our head to look at the object (see Fig. 9.2).

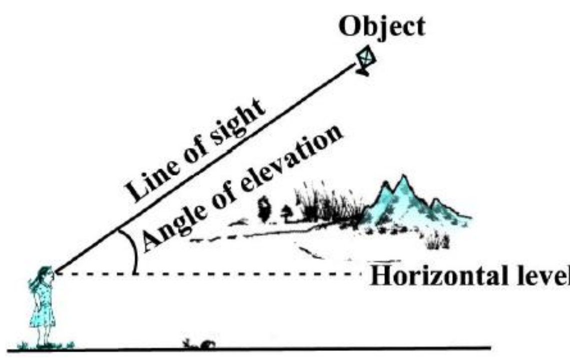


Fig. 9.2

Now, consider the situation given in Fig. 9.3. The girl sitting on the balcony is *looking down* at a flower pot placed on a stair of the temple. In this case, the line of sight is *below* the horizontal level. The angle so formed by the line of sight with the horizontal is called the *angle of depression*.

Thus, the **angle of depression** of a point on the object being viewed is the angle formed by the line of sight with the horizontal when the point is below the horizontal level, i.e., the case when we lower our head to look at the point being viewed (see Fig. 9.3).

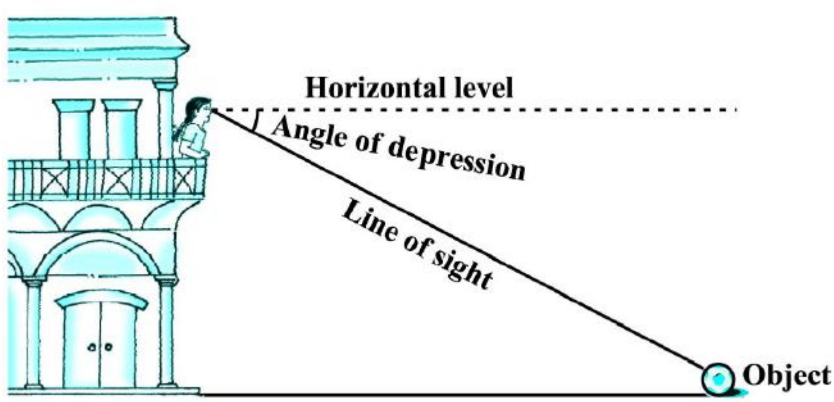


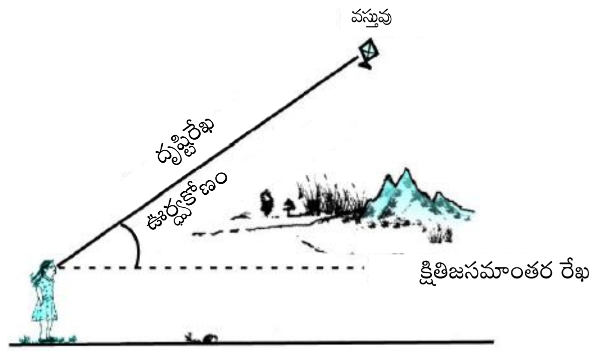
Fig. 9.3

Now, you may identify the lines of sight, and the angles so formed in Fig. 9.3. Are they angles of elevation or angles of depression?

Let us refer to Fig. 9.1 again. If you want to find the height CD of the minar without actually measuring it, what information do you need? You would need to know the following:

(i) the distance DE at which the student is standing from the foot of the minar

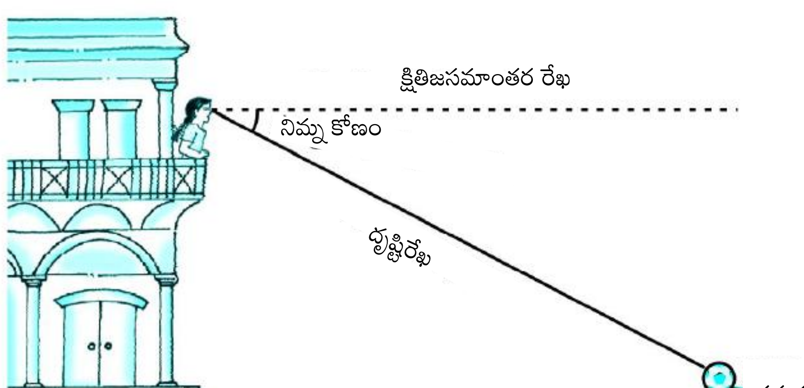
ఇది పరిశీలకుడు చూసే బిందువు క్షితిజ సమాంతర రేఖకు ఎగువన ఉంటే, అంటే మనం తల ఎత్తి చూసే సందర్భంలోనే దృష్టిరేఖ, క్షితిజ సమాంతర రేఖతో చేసే కోణము, పరిశీలకుడు చూసే బిందువు యొక్క **ఊర్ధ్వ కోణం** అవుతుంది. (పటం 9.2ను చూడండి).



పటం 9.2

ఇప్పుడు పటం. 9.3లో ఇవ్వబడిన ఘటనను పరిగణించండి. ఒక బాల్కనీలో కూర్చొని ఉన్న ఆ బాలిక గుడి మెట్ల మీద ఉన్న పూల కుండి వైపు *క్రిందకు చూస్తుంది.* ఈ సందర్భంలో దృష్టిరేఖ అనేది క్షితిజ సమాంతర రేఖకు *క్రిందగా* ఉంది. ఈ విధంగా దృష్టిరేఖ క్షితిజ సమాంతరరేఖతో చేసే కోణంను *నిమ్నకోణం* అని పిలుస్తారు.

వస్తువు క్షితిజ సమాంతర రేఖకు దిగువన ఉన్నప్పుడు దృష్టిరేఖ క్షితిజ సమాంతర రేఖతో చేసే కోణం **నిమ్న కోణం** అవుతుంది. అంటే మనం తలను దించి చూసే సందర్భంలో నిమ్నకోణం ఏర్పడుతుంది. (పటం 9.3ను చూడండి)



పటం 9.3

ఇప్పుడు పటం 9.3లో దృష్టిరేఖలు మరియు ఏర్పడిన కోణాలను మీరు గుర్తించవచ్చు. ఆ కోణాలు ఊర్ధ్వ కోణాలా, లేక నిమ్నకోణాలా?

మరల పటం 9.1 ను గమనిద్దాం. మినార్ ఎత్తు CD ను వాస్తవంగా కొలవకుండానే కనుగొనాలంటే మీకు ఏ సమాచారం అవసరం? క్రింది విషయాలు తెలుసుకోవడం మీకు అవసరం:

(i) మినార్ పాదం వద్ద నుండి విద్యార్థి నిలబడిన స్థానంకు గల దూరం DE

(ii) the angle of elevation, ∠ BAC, of the top of the minar

(iii) the height AE of the student.

Assuming that the above three conditions are known, how can we determine the height of the minar?

In the figure, CD = CB + BD. Here, BD = AE, which is the height of the student.

To find BC, we will use trigonometric ratios of ∠ BAC or ∠ A.

In Δ ABC, the side BC is the opposite side in relation to the known ∠ A. Now, which of the trigonometric ratios can we use? Which one of them has the two values that we have and the one we need to determine? Our search narrows down to using either tan A or cot A, as these ratios involve AB and BC.

Therefore, $\tan A = \frac{BC}{AB}$ or $\cot A = \frac{AB}{BC}$, which on solving would give us BC.

By adding AE to BC, you will get the height of the minar.

Now let us explain the process, we have just discussed, by solving some problems.

Example 1 : A tower stands vertically on the ground. From a point on the ground, which is 15 m away from the foot of the tower, the angle of elevation of the top of the tower is found to be 60°. Find the height of the tower.

Solution : First let us draw a simple diagram to represent the problem (see Fig. 9.4). Here AB represents the tower, CB is the distance of the point from the tower and ∠ ACB is the angle of elevation. We need to determine the height of the tower, i.e., AB. Also, ACB is a triangle, right-angled at B.

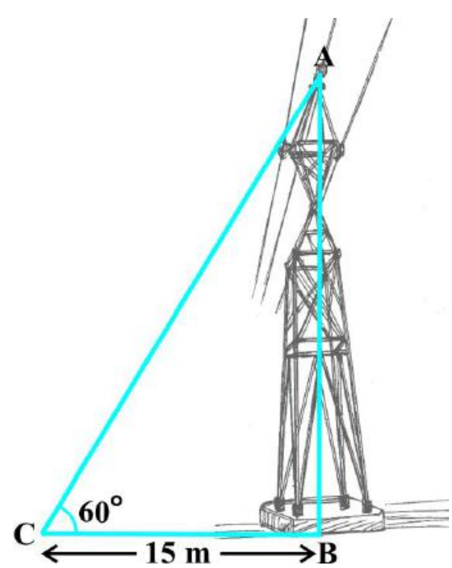


Fig. 9.4

To solve the problem, we choose the trigonometric ratio tan 60° (or cot 60°), as the ratio involves AB and BC.

Now, $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

i.e., $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

i.e., $AB = 15\sqrt{3}$

Hence, the height of the tower is $15\sqrt{3}$ m.

(ii) మినార్ పైభాగాన్ని చూసే ఊర్ధ్వ కోణం $\angle BAC$.

(iii) విద్యార్థి ఎత్తు AE.

పై మూడు విషయాలు మనకు తెలుసు అనుకుంటే, మినార్ ఎత్తును మనం ఎలా నిర్ధారించాలి?

పటంలో, $CD = CB + BD$. ఇక్కడ, $BD = AE$, ఇది విద్యార్థి ఎత్తు.

BC ను కనుగొనాలంటే $\angle BAC$ లేదా $\angle A$ యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను మనం ఉపయోగించాలి.

ΔABCలో, తెలిసిన $\angle A$ కు ఎదురుగా ఉన్న భుజం BC. ఇప్పుడు మనం ఏ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని వాడాలి? రెండు విలువలలో ఒకటి తెలిసినది అయి ఉండి రెండవ విలువ కనుగొనాల్సింది అయి ఉండాలి. మన అన్వేషణ ఫలించాలి అంటే మనం tan A లేదా cot A లను ఉపయోగించాలి. ఎందుకంటే ఆ నిష్పత్తులలో AB మరియు BC లు ఇమిడి ఉన్నాయి.

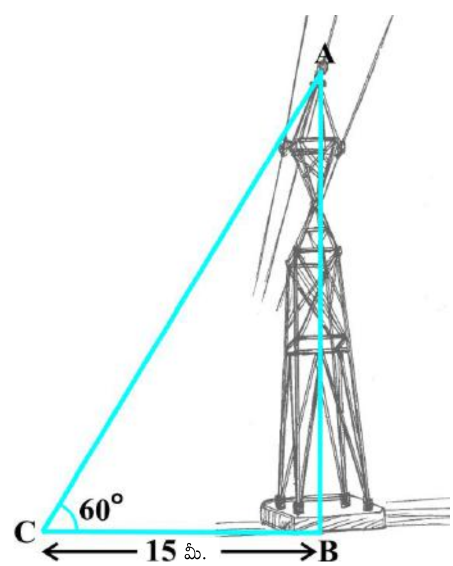
కావున, $\tan A = \frac{BC}{AB}$ లేదా $\cot A = \frac{AB}{BC}$, దీని సాధన ద్వారా BC కనుగొనవచ్చును.

BC కు AE ను కలపడం ద్వారా మినార్ ఎత్తు లభిస్తుంది.

మనం చర్చించిన ప్రక్రియను విశదీకరించే కొన్ని సమస్యలను సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 1: ఒక టవర్ నేలపై నిట్టనిలువుగా ఉంది. టవర్ పాదం నుండి 15 మీ. దూరంలో ఉన్న ఒక బిందువు నుండి టవర్ పై కొనను 60° ఊర్ధ్వ కోణంతో చూసిన టవర్ ఎత్తును కనుక్కోండి.

సాధన : మొదటగా సమస్యకు సంబంధించిన చిత్తు పటాన్ని గీద్దాం. (పటం 9.4ను చూడండి) ఇక్కడ AB టవర్‌ను, CB అనునది టవర్ పాదం నుండి బిందువుకు గల దూరాన్ని, $\angle ACB$ అనునది ఊర్ధ్వ కోణాన్ని సూచిస్తున్నాయి. మనం టవర్ ఎత్తు AB ను కనుగొనాలి. ACB త్రిభుజంలో B వద్ద లంబకోణం ఉంది.



పటం 9.4

సమస్యను సాధించాలంటే, త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి $\tan 60^\circ$ (లేదా $\cot 60^\circ$) లను ఎంచుకోవాలి. ఎందుకంటే ఆ నిష్పత్తులలో AB మరియు BCలు ఇమిడి ఉన్నాయి.

ఇప్పుడు, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

అనగా, $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

అనగా, $AB = 15\sqrt{3}$

కనుక, టవర్ ఎత్తు $15\sqrt{3}$ మీ.

Example 2 : An electrician has to repair an electric fault on a pole of height 5 m. She needs to reach a point 1.3m below the top of the pole to undertake the repair work (see Fig. 9.5). What should be the length of the ladder that she should use which, when inclined at an angle of 60° to the horizontal, would enable her to reach the required position? Also, how far from the foot of the pole should she place the foot of the ladder? (You may take $\sqrt{3} = 1.73$)

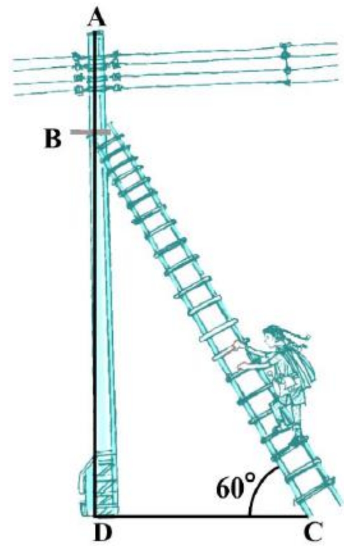


Fig. 9.5

Solution : In Fig. 9.5, the electrician is required to reach the point B on the pole AD.

So, $\quad BD = AD - AB = (5 - 1.3)\text{m} = 3.7 \text{ m}.$

Here, BC represents the ladder. We need to find its length, i.e., the hypotenuse of the right triangle BDC.

Now, can you think which trigonometic ratio should we consider?

It should be sin 60°.

So, $$\frac{BD}{BC} = \sin 60° \quad \text{or} \quad \frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Therefore, $$BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28 \text{ m (approx.)}$$

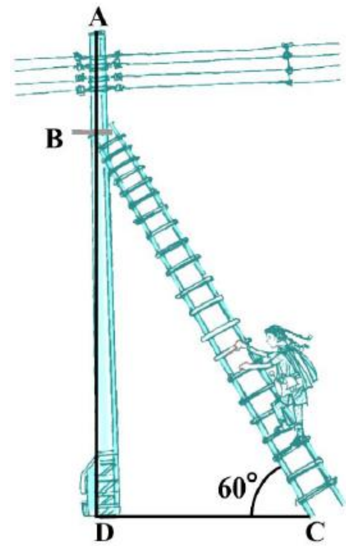
i.e., the length of the ladder should be 4.28 m.

Now, $$\frac{DC}{BD} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

i.e., $$DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14 \text{ m (approx.)}$$

Therefore, she should place the foot of the ladder at a distance of 2.14 m from the pole.

ఉదాహరణ 2 : 5 మీ. ఎత్తు గల విద్యుత్ స్తంభంపై ఒక ఎలక్ట్రీషియన్ మరమ్మత్తు చేయాల్సి ఉంది. మరమ్మత్తు చేయడానికి ఆ స్తంభం పై నుండి 1.3 మీ. తక్కువ ఎత్తుకు చేరాలి. (పటం 9.5 చూడండి). ఆమె కావలసిన ఎత్తుకు చేరటానికి, నిచ్చెనను క్షితిజ సమాంతరంకు 60° కోణంతో ఉంచుటకు, ఎంత పొడవు గల నిచ్చెనను తీసుకోవాలి. నిచ్చెన అడుగు భాగము స్తంభం అడుగు భాగానికి ఎంత దూరంలో ఉంచాలి? ($\sqrt{3}$ = 1.73 గా తీసుకోండి)



పటం 9.5

సాధన : పటం 9.5 లో AD అను స్తంభంపై ఎలక్ట్రీషియన్ చేరుకోవలసిన స్థానం B.

కాబట్టి, $BD = AD - AB = (5 - 1.3)$మీ. $= 3.7$ మీ.

ఇక్కడ, BC నిచ్చెనను సూచిస్తుంది. మనం నిచ్చెన పొడవును కనుగొనాలి. అనగా, ఇది BDC అను లంబకోణ త్రిభుజం లో కర్ణము.

ఇప్పుడు, మనం ఏ త్రికోణమితి నిష్పత్తిని పరిగణించాలో మీరు ఆలోచించగలరా?

కనుక మనము $\sin 60^\circ$ను తీసుకోవాలి.

కాబట్టి, $$\frac{BD}{BC} = \sin 60^\circ \text{ లేదా } \frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

అందువలన, $$BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28 \text{ మీ. (సుమారుగా)}$$

అంటే, నిచ్చెన యొక్క పొడవు 4.28 మీ. ఉండాలి.

ఇప్పుడు, $$\frac{DC}{BD} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

అంటే, $$DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14 \text{ మీ. (సుమారుగా)}$$

అందువలన, ఆమె స్తంభం నుండి 2.14 మీ. దూరంలో నిచ్చెన అడుగు భాగాన్ని ఉంచింది.

Example 3 : An observer 1.5 m tall is 28.5 m away from a chimney. The angle of elevation of the top of the chimney from her eyes is 45°. What is the height of the chimney?

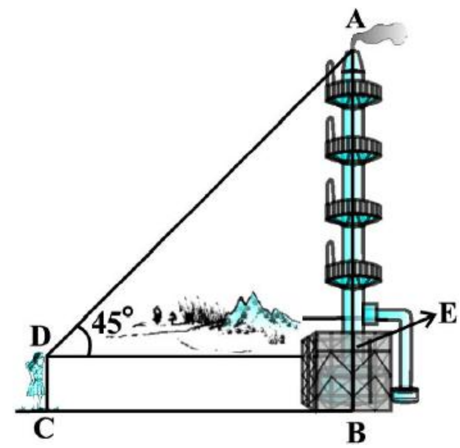


Fig. 9.6

Solution : Here, AB is the chimney, CD the observer and $\angle$ ADE the angle of elevation (see Fig. 9.6). In this case, ADE is a triangle, right-angled at E and we are required to find the height of the chimney.

We have $\quad AB = AE + BE = AE + 1.5$

and $\quad DE = CB = 28.5$ m

To determine AE, we choose a trigonometric ratio, which involves both AE and DE. Let us choose the tangent of the angle of elevation.

Now, $$\tan 45° = \frac{AE}{DE}$$

i.e., $$1 = \frac{AE}{28.5}$$

Therefore, $\quad AE = 28.5$

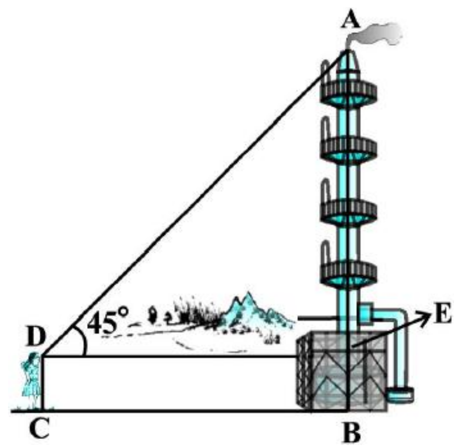
So the height of the chimney (AB) = (28.5 + 1.5) m = 30 m.

Example 4 : From a point P on the ground the angle of elevation of the top of a 10 m tall building is 30°. A flag is hoisted at the top of the building and the angle of elevation of the top of the flagstaff from P is 45°. Find the length of the flagstaff and the distance of the building from the point P. (You may take $\sqrt{3}$ = 1.732)

Solution : In Fig. 9.7, AB denotes the height of the building, BD the flagstaff and P the given point. Note that there are two right triangles PAB and PAD. We are required to find the length of the flagstaff, i.e., DB and the distance of the building from the point P, i.e., PA.

ఉదాహరణ 3 : 1.5 మీ. ఎత్తు ఉన్న ఒక పరిశీలకురాలు, చిమ్నీ నుండి 28.5 మీ. దూరంలో ఉన్నది. ఆమె తన కంటి నుండి చిమ్నీ పై చివరకు చేసే ఊర్ధ్వకోణం 45°. ఆ చిమ్నీ ఎత్తు ఎంత?

సాధన : ఇక్కడ, AB చిమ్నీని, CD పరిశీలకుడిని సూచిస్తున్నాయి. $\angle ADE$ ఊర్ధ్వకోణమును సూచిస్తున్నాయి (పటం 9.6 చూడండి). ఈ సందర్భంలో, ADE అనేది, E వద్ద లంబకోణం గల ఒక త్రిభుజం. మనం చిమ్నీ ఎత్తు కనుగొనాలి.



పటం 9.6

$AB = AE + BE = AE + 1.5$ అని మనకు తెలుసు.

మరియు $DE = CB = 28.5$ మీ.

AE ను కనుగొనాలి అంటే, మనం AE మరియు DE లను కలిగి ఉన్న త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని తీసుకోవాలి. మనం ఈ ఊర్ధ్వకోణానికి tangent ను తీసుకుందాం.

ఇప్పుడు, $\tan 45° = \frac{AE}{DE}$

అంటే, $1 = \frac{AE}{28.5}$

కనుక, $AE = 28.5$

చిమ్నీ ఎత్తు (AB) = (28.5 + 1.5) మీ. = 30 మీ.

ఉదాహరణ 4 : నేలపై P అనే బిందువు నుండి సమీపంలోని 10 మీ. ఎత్తుగల ఒక భవనంపై చివరతో చేసిన ఊర్ధ్వ కోణం 30°. ఆ భవనము పై ఒక జెండా స్తంభం ఉంటే, P వద్ద నుండి జెండా స్తంభపు పైకొనతో చేసిన ఊర్ధ్వ కోణం 45°. జెండా స్తంభం యొక్క ఎత్తు మరియు భవనము నుండి P కు గల దూరాలను కనుగొనుము. ($\sqrt{3} = 1.732$ గా తీసుకోండి.)

సాధన : పటం 9.7 లో AB భవనం యొక్క ఎత్తు, BD జెండా స్తంభము మరియు P ను ఇచ్చిన బిందువును సూచిస్తుంది. PAB మరియు PAD అనేవి రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలని గమనించవచ్చు. దీని నుండి మనం జెండా స్తంభం యొక్క ఎత్తు కనుగొనాలి, అంటే DB మరియు బిందువు P నుండి భవనానికి గల దూరం PA లను కనుగొనాలి.

Since, we know the height of the building AB, we will first consider the right Δ PAB.

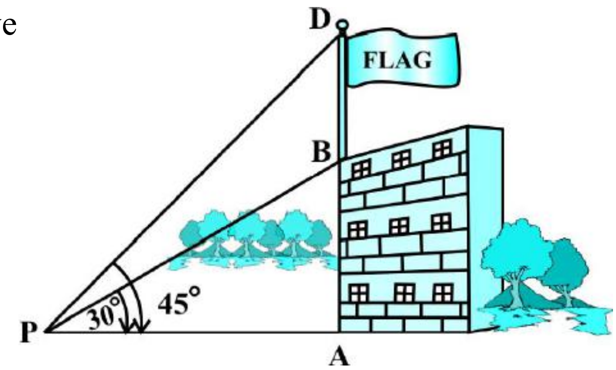


Fig. 9.7

We have $\tan 30° = \dfrac{AB}{AP}$

i.e., $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{10}{AP}$

Therefore, $AP = 10\sqrt{3}$

i.e., the distance of the building from P is $10\sqrt{3}$ m = 17.32 m.

Next, let us suppose DB = x m. Then AD = $(10 + x)$ m.

Now, in right Δ PAD, $\tan 45° = \dfrac{AD}{AP} = \dfrac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

Therefore, $1 = \dfrac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

i.e., $x = 10\left(\sqrt{3} - 1\right) = 7.32$

So, the length of the flagstaff is 7.32 m.

Example 5 : The shadow of a tower standing on a level ground is found to be 40 m longer when the Sun's altitude is 30° than when it is 60°. Find the height of the tower.

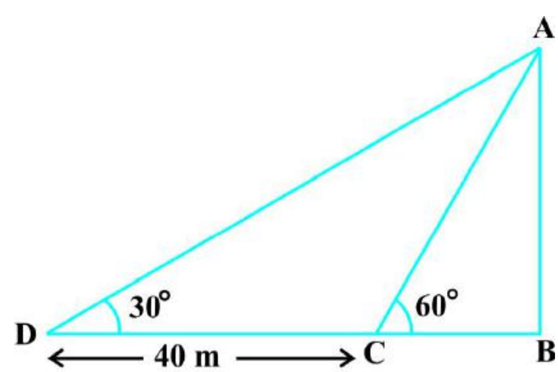


Fig. 9.8

Solution : In Fig. 9.8, AB is the tower and BC is the length of the shadow when the Sun's altitude is 60°, i.e., the angle of elevation of the top of the tower from the tip of the shadow is 60° and DB is the length of the shadow, when the angle of elevation is 30°.

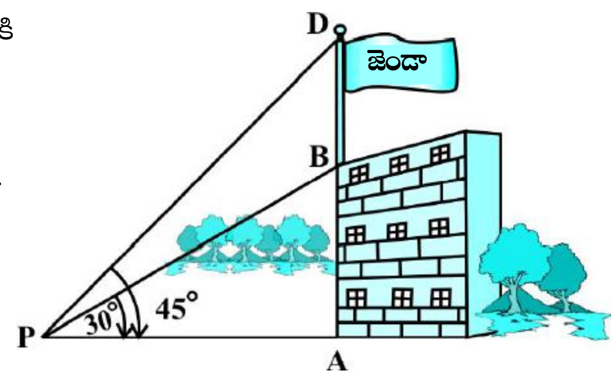
Now, let AB be h m and BC be x m. According to the question, DB is 40 m longer than BC.

మనకు భవనం ఎత్తు AB తెలుసు కనుక, Δ PAB ను పరిగణలోకి తీసుకుందాం.

$\tan 30° = \frac{AB}{AP}$ అని మనము చెప్పవచ్చు.

అంటే, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

కనుక, $AP = 10\sqrt{3}$



పటం 9.7

అంటే, P నుండి భవనానికి గల దూరం $10\sqrt{3}$ మీ = 17.32 మీ. అవుతుంది.

తదుపరి జెండా స్తంభం ఎత్తు $DB = x$ మీ. అనుకుందాం. అప్పుడు $AD = (10 + x)$ మీ.

ఇప్పుడు, లంబకోణ త్రిభుజం ΔPAD లో, $\tan 45° = \frac{AD}{AP} = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

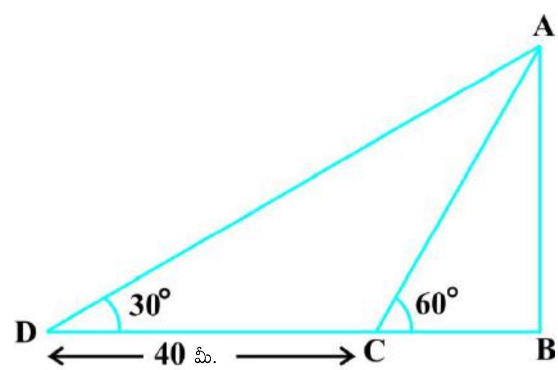
కనుక, $1 = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

అంటే, $x = 10\left(\sqrt{3} - 1\right) = 7.32$

కనుక, జెండా స్తంభం ఎత్తు 7.32 మీ.

ఉదాహరణ 5 : భూమితో సూర్యకిరణాలు 30° ల కోణం చేస్తున్నప్పుడు సమతల భూమిపై గల ఒక టవర్ యొక్క నీడ పొడవు, భూమితో సూర్యకిరణాలు 60°ల కోణం చేస్తున్నప్పుడు టవర్ యొక్క నీడ పొడవు కంటే 40 మీ. ఎక్కువ పొడవు కలిగి ఉంటే టవర్ యొక్క ఎత్తు కనుగొనుము.

సాధన : పటం 9.8 లో టవర్ పొడవు AB గాను, సూర్యకిరణాలు 60°ల కోణం చేస్తున్నప్పుడు టవర్ యొక్క నీడ పొడవు BC గాను, సూర్యకిరణాలు 30°ల కోణం చేస్తున్నప్పుడు టవర్ యొక్క నీడ పొడవు DB గాను గమనించవచ్చు.



పటం 9.8

ఇప్పుడు, $AB = h$ మీ. మరియు $BC = x$ మీ. అనుకొనుము. ప్రశ్నలో ఇచ్చిన విధంగా DB అనునది BC కన్నా 40 మీ. అధిక పొడవు కలదు.

So, $\quad DB = (40 + x)$ m

Now, we have two right triangles ABC and ABD.

In ΔABC, $\quad \tan 60° = \dfrac{AB}{BC}$

or, $\quad \sqrt{3} = \dfrac{h}{x} \qquad (1)$

In ΔABD, $\quad \tan 30° = \dfrac{AB}{BD}$

i.e., $\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{x+40} \qquad (2)$

From (1), we have $\quad h = x\sqrt{3}$

Putting this value in (2), we get $\left(x\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = x + 40$, i.e., $3x = x + 40$

i.e., $\quad x = 20$

So, $\quad h = 20\sqrt{3} \qquad$ [From (1)]

Therefore, the height of the tower is $20\sqrt{3}$ m.

Example 6 : The angles of depression of the top and the bottom of an 8 m tall building from the top of a multi-storeyed building are 30° and 45°, respectively. Find the height of the multi-storeyed building and the distance between the two buildings.

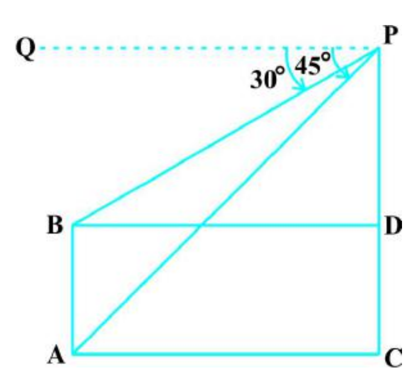


Fig. 9.9

Solution : In Fig. 9.9, PC denotes the multi-storyed building and AB denotes the 8 m tall building. We are interested to determine the height of the multi-storeyed building, i.e., PC and the distance between the two buildings, i.e., AC.

Look at the figure carefully. Observe that PB is a transversal to the parallel lines PQ and BD. Therefore, $\angle$QPB and $\angle$PBD are alternate angles, and so are equal. So $\angle$ PBD = 30°. Similarly, $\angle$ PAC = 45°.

In right Δ PBD, we have

కాబట్టి, $DB = (40 + x)$ మీ.

ఇప్పుడు, మనకు ABC, ABD అను రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు ఉన్నాయి.

Δ ABCలో, $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

లేదా, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ (1)

Δ ABDలో, $\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

అంటే, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40}$ (2)

(1) నుండి, $h = x\sqrt{3}$ అవుతుంది

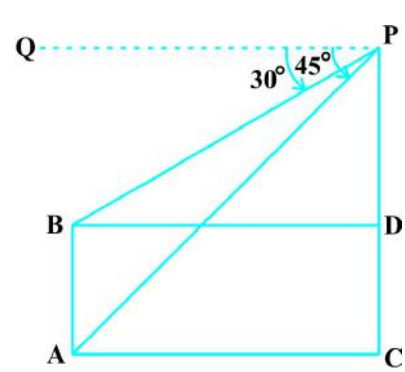
ఈ విలువను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా, $\left(x\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = x + 40$, అంటే, $3x = x + 40$ అవుతుంది.

అంటే, $x = 20$

కాబట్టి, $h = 20\sqrt{3}$ [(1) నుండి]

అందువలన, టవర్ యొక్క ఎత్తు $20\sqrt{3}$ మీ.

ఉదాహరణ 6 : ఒక బహుళ అంతస్తు భవనం పై నుండి ఎదురుగా గల 8 మీ. ఎత్తు గల ఒక భవనం యొక్క పైభాగాన్ని 30°ల నిమ్న కోణంతోను, భవనం కింది భాగాన్ని 45°ల నిమ్నకోణంతోను చూస్తే, బహుళ అంతస్తు భవనం ఎత్తు ఎంత? రెండు భవనాల మధ్య దూరం ఎంత?



పటం 9.9

సాధన : పటం 9.9 లో, PC అనునది బహుళ అంతస్తు భవనాన్ని, AB అనునది 8మీ. ఎత్తు గల భవనాన్ని, AC అనేది రెండు భవనాల మధ్య దూరాన్ని సూచిస్తున్నాయి. మనం బహుళ అంతస్తు భవనం ఎత్తు PC ని కనుగొనాలి.

పటాన్ని జాగ్రత్తగా పరిశీలించండి. PQ మరియు BDలు సమాంతర రేఖలు, PB వాటి తిర్యగ్రేఖ అవుతుంది. అందువలన, $\angle QPB$ మరియు $\angle PBD$ లు అంతరాభిముఖ కోణాలు మరియు అవి సమానం. కాబట్టి $\angle PBD = 30°$. అదేవిధంగా, $\angle PAC = 45°$.

ΔPBD లంబకోణ త్రిభుజంలో,

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{or} \quad BD = PD\sqrt{3}$$

In right Δ PAC, we have

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45° = 1$$

i.e., $PC = AC$

Also, $PC = PD + DC$, therefore, $PD + DC = AC$.

Since, AC = BD and DC = AB = 8 m, we get PD + 8 = BD = $PD\sqrt{3}$ (Why?)

This gives $$PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = 4\left(\sqrt{3}+1\right)\text{m}.$$

So, the height of the multi-storeyed building is $\left\{4\left(\sqrt{3}+1\right)+8\right\}\text{m} = 4\left(3+\sqrt{3}\right)\text{m}$ and the distance between the two buildings is also $4\left(3+\sqrt{3}\right)\text{m}$.

Example 7 : From a point on a bridge across a river, the angles of depression of the banks on opposite sides of the river are 30° and 45°, respectively. If the bridge is at a height of 3 m from the banks, find the width of the river.

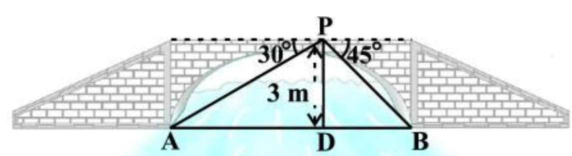


Fig. 9.10

Solution : In Fig 9.10, A and B represent points on the bank on opposite sides of the river, so that AB is the width of the river. P is a point on the bridge at a height of 3 m, i.e., DP = 3 m. We are interested to determine the width of the river, which is the length of the side AB of the D APB.

Now, $AB = AD + DB$

In right Δ APD, ∠ A = 30°.

So, $$\tan 30° = \frac{PD}{AD}$$

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ లేదా } BD = PD\sqrt{3}$$

Δ PAC లంబకోణ త్రిభుజంలో,

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45° = 1$$

అంటే, $PC = AC$

అంతేగాక, $PC = PD + DC$, కనుక, $PD + DC = AC$.

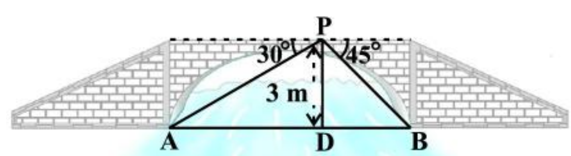
$AC = BD$ మరియు $DC = AB = 8$ మీ., $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$ (ఎందుకు?)

కావున $$PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1) \text{ మీ.}$$

కనుక, బహుళ అంతస్తు భవనం ఎత్తు $\{4(\sqrt{3}+1)+8\}$ మీ. $= 4(3+\sqrt{3})$ మీ.

మరియు రెండు భవనాల మధ్య దూరం $4(3+\sqrt{3})$ మీ.

ఉదాహరణ 7 : ఒక నదికి గల వంతెన పై ఒక స్థానం నుండి చూస్తే నదికి ఇరువైపులా గల రెండు తీరాలు వరుసగా 30°, 45° లు నిమ్న కోణాలలో కనబడ్డాయి. తీరాల నుండి వంతెన 3 మీటర్లు ఎత్తులో ఉంటే, ఆ నది వెడల్పు కనుగొనండి.



పటం 9.10

సాధన : పటం 9.10 లో A , B లు నది యొక్క రెండు తీరాలపై ఇరువైపులా గల బిందువులు. AB అనునది నది వెడల్పు. వంతెనపై గల P అను బిందువు 3 మీ.ఎత్తులో ఉంది. DP = 3 మీ. Δ APB లో భుజం AB యొక్క పొడవే, మనం కనుగొనాల్సిన నది యొక్క వెడల్పు D.

ఇప్పుడు, $AB = AD + DB$

లంబకోణ త్రిభుజం Δ APD లో $\angle A = 30°$.

కావున, $$\tan 30° = \frac{PD}{AD}$$

i.e., $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$ or $AD = 3\sqrt{3}$ m

Also, in right Δ PBD, ∠ B = 45°. So, BD = PD = 3 m.

Now, $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3\,(1 + \sqrt{3})$ m.

Therefore, the width of the river is $3\left(\sqrt{3}+1\right)$m .

EXERCISE 9.1

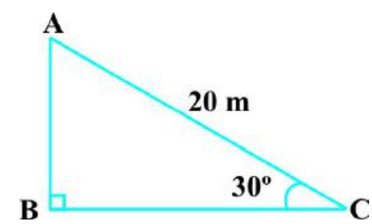


Fig. 9.11

1. A circus artist is climbing a 20 m long rope, which is tightly stretched and tied from the top of a vertical pole to the ground. Find the height of the pole, if the angle made by the rope with the ground level is 30° (see Fig. 9.11).

2. A tree breaks due to storm and the broken part bends so that the top of the tree touches the ground making an angle 30° with it. The distance between the foot of the tree to the point where the top touches the ground is 8 m. Find the height of the tree.

3. A contractor plans to install two slides for the children to play in a park. For the children below the age of 5 years, she prefers to have a slide whose top is at a height of 1.5 m, and is inclined at an angle of 30° to the ground, whereas for elder children, she wants to have a steep slide at a height of 3 m, and inclined at an angle of 60° to the ground. What should be the length of the slide in each case?

4. The angle of elevation of the top of a tower from a point on the ground, which is 30 m away from the foot of the tower, is 30°. Find the height of the tower.

5. A kite is flying at a height of 60 m above the ground. The string attached to the kite is temporarily tied to a point on the ground. The inclination of the string with the ground is 60°. Find the length of the string, assuming that there is no slack in the string.

6. A 1.5 m tall boy is standing at some distance from a 30 m tall building. The angle of elevation from his eyes to the top of the building increases from 30° to 60° as he walks towards the building. Find the distance he walked towards the building.

7. From a point on the ground, the angles of elevation of the bottom and the top of a transmission tower fixed at the top of a 20 m high building are 45° and 60° respectively. Find the height of the tower.

అంటే, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$ లేక $AD = 3\sqrt{3}$ మీ

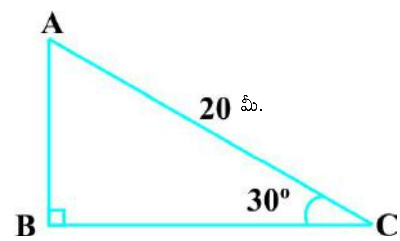
లంబకోణ త్రిభుజం Δ PBD లో, $\angle B = 45°$. కనుక, BD = PD = 3 మీ.

ఇప్పుడు, $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3\ (1 + \sqrt{3}\ )$ మీ.

కావున, నది వెడల్పు $3\ \sqrt{3}\ \ 1$ మీ.

అభ్యాసం 9.1

1. ఒక సర్కస్ కళాకారుడు నేలపై నిలువుగా పాతబడిన ఒక స్తంభం పై కొనకు కట్టబడిన 20 మీ. పొడవైన తాడుపై ఎగబాకుతున్నాడు. ఆ తాడు నేలతో 30°ల కోణం చేస్తున్న, స్థంభం ఎత్తును కనుగొనండి. (పటం 9.11ను చూడండి).



పటం 9.11

2. ఒక చెట్టు తుఫాను గాలికి విరిగి, విరిగిన ఆ కొమ్మ చివర కొన నేలను తాకుతూ, నేలతో 30°ల కోణం చేసింది. నేలను తాకిన చెట్టు కొనకు, చెట్టు మొదలుకు మధ్య గల దూరం 8 మీ. అయిన చెట్టు విరగకముందు ఆ చెట్టు ఎత్తును కనుగొనండి.
3. ఒక గుత్తేదారు (కాంట్రాక్టర్) పార్కులో పిల్లలు ఆడుకోవడానికి రెండు వాలు బల్లలని ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నది. 5 సంవత్సరాలలోపు వయసు గల పిల్లల కోసం ఏర్పాటు చేయాలనుకున్న వాలుబల్ల పై భాగం నేలకు 1.5 మీ. ఎత్తులోను, వాలుబల్ల నేలతో 30°ల కోణం చేసేలా మరియు పెద్ద పిల్లలకు, వాలుబల్ల పై భాగం నేలకు 3 మీటర్ల ఎత్తులోనూ, వాలుబల్ల నేలతో 60° ల కోణం చేసే విధంగా ఏర్పాటు చేస్తే, ఆయా వాలుబల్లల పొడవులను కనుగొనండి?
4. ఒక టవర్ యొక్క పైకొన టవరుకు 30 మీ. దూరంలోనున్న బిందువు నుండి 30° ఊర్ధ్వకోణం చేస్తే టవర్ ఎత్తును కనుగొనుము.
5. గాలిపటం నేలకు 60 మీ. ఎత్తులో ఎగురుతుంది. గాలిపటంకు కట్టబడిన దారం రెండవ కొన నేలపై ఒక బిందువు వద్ద కట్టబడింది. ఆ దారం నేలతో 60°ల ఊర్ధ్వకోణం చేస్తోంది. దారం వదులుగా లేదని భావించి, దారం పొడవును కనుగొనుము.
6. 30 మీ. పొడవు గల ఒక భవనానికి కొంత దూరంలో 1.5 మీ. ఎత్తు గల బాలుడు నిలబడ్డాడు. అతను భవనం వైపుకు కొంత దూరం నడిచిన తర్వాత భవనం పైభాగాన్ని చూసినప్పుడు ఊర్ధ్వకోణం 30° నుండి 60° కు పెరిగింది. అతను భవనం వైపుకు నడిచిన దూరాన్ని కనుగొనండి?
7. 20 మీ. పొడవు గల ఒక భవనం పైనున్న ట్రాన్స్‌మిషన్ టవర్ యొక్క అడుగుభాగం మరియు పైభాగాలను వరుసగా 45° మరియు 60° ల ఊర్ధ్వ కోణాలతో నేలపై ఉన్న ఒక బిందువునుండి చూస్తే, టవర్ యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము.

8. A statue, 1.6 m tall, stands on the top of a pedestal. From a point on the ground, the angle of elevation of the top of the statue is 60° and from the same point the angle of elevation of the top of the pedestal is 45°. Find the height of the pedestal.

9. The angle of elevation of the top of a building from the foot of the tower is 30° and the angle of elevation of the top of the tower from the foot of the building is 60°. If the tower is 50 m high, find the height of the building.

10. Two poles of equal heights are standing opposite each other on either side of the road, which is 80 m wide. From a point between them on the road, the angles of elevation of the top of the poles are 60° and 30°, respectively. Find the height of the poles and the distances of the point from the poles.

11. A TV tower stands vertically on a bank of a canal. From a point on the other bank directly opposite the tower, the angle of elevation of the top of the tower is 60°. From another point 20 m away from this point on the line joing this point to the foot of the tower, the angle of elevation of the top of the tower is 30° (see Fig. 9.12). Find the height of the tower and the width of the canal.

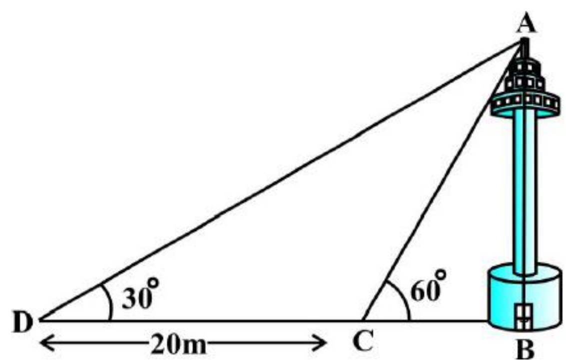


Fig. 9.12

12. From the top of a 7 m high building, the angle of elevation of the top of a cable tower is 60° and the angle of depression of its foot is 45°. Determine the height of the tower.

13. As observed from the top of a 75 m high lighthouse from the sea-level, the angles of depression of two ships are 30° and 45°. If one ship is exactly behind the other on the same side of the lighthouse, find the distance between the two ships.

14. A 1.2 m tall girl spots a balloon moving with the wind in a horizontal line at a height of 88.2 m from the ground. The angle of elevation of the balloon from the eyes of the girl at any instant is 60°. After some time, the angle of elevation reduces to 30° (see Fig. 9.13). Find the distance travelled by the balloon during the interval.

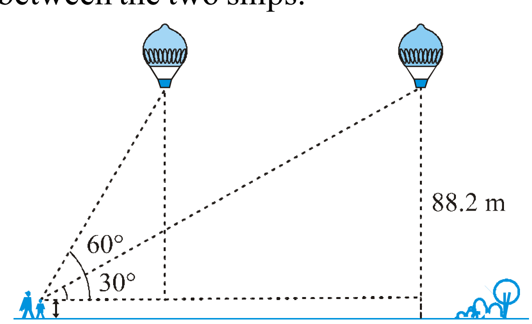


Fig. 9.13

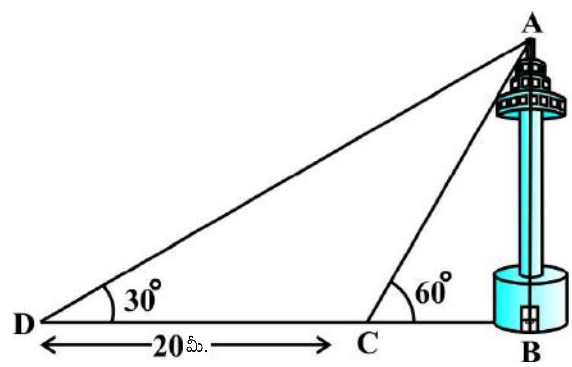
15. A straight highway leads to the foot of a tower. A man standing at the top of the tower observes a car at an angle of depression of 30°, which is approaching the foot of the

8. 1.6 మీ. పొడవు గల ఒక విగ్రహం పీఠంపై నిలబెట్టబడి ఉంది. నేలపై ఒక బిందువు నుండి పరిశీలించిన, విగ్రహం పై భాగం 60°ల మరియు అదే బిందువు నుండి పీఠంపై భాగం 45°ల ఊర్ధ్వ కోణాలు చేస్తున్నాయి. పీఠం ఎత్తు కనుగొనుము.

9. ఒక టవర్ అడుగుభాగం నుండి దగ్గరలోని భవనం పైభాగం 30° ఊర్ధ్వ కోణము మరియు భవనం అడుగుభాగం నుండి టవర్ పై భాగం 60° ఊర్ధ్వకోణము చేస్తుంది. ఈ టవర్ ఎత్తు 50 మీ. అయితే భవనం ఎత్తును కనుగొనుము.

10. సమాన ఎత్తులు గల రెండు స్తంభాలు ఒక రోడ్డుకు ఇరువైపులా ఉన్నాయి. వాటి మధ్య దూరం 80 మీ. రెండు స్తంభాల మధ్య రోడ్డుపై గల ఒక బిందువునుండి స్తంభాలపై భాగాలు వరుసగా 60° మరియు 30° ల ఊర్ధ్వ కోణాలు చేస్తున్నాయి. స్తంభాల ఎత్తులను మరియు స్తంభాల నుండి ఆ బిందువుకు గల దూరాలను కనుగొనండి.

11. కాలువ గట్టుపై ఒక టీవీ టవర్ నిటారుగా ఉంది. ఈ టి.వి టవర్‌కు తిన్నగా ఎదురుగా ఉన్న కాలువ గట్టుపై ఒక బిందువు నుండి ఈ టవరు పైభాగం 60° ఊర్ధ్వకోణము చేస్తుంది. టవర్ అడుగుభాగం మరియు బిందువును కలుపు రేఖపై ఈ బిందువుకు 20 మీ. దూరంలో గల మరో బిందువు నుండి టవర్ పైభాగం 30° ఊర్ధ్వ కోణము చేస్తుంది. (పటం 9.12 చూడండి). టవర్ ఎత్తును మరియు కాలువ వెడల్పును కనుగొనుము.

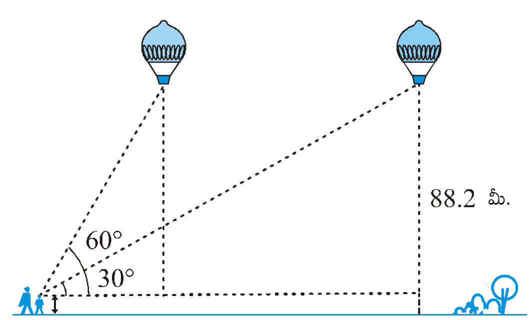


పటం 9.12

12. 7 మీ. ఎత్తుగల ఒక భవనం నుండి కేబుల్ టవర్ పైభాగం 60° ఊర్ధ్వకోణము మరియు కేబుల్ టవర్ అడుగుభాగం 45°ల నిమ్నకోణాన్ని చేస్తుంది. ఆ టవర్ ఎత్తును కనుగొనుము.

13. సముద్రం మట్టం నుండి 75 మీ. ఎత్తు గల లైట్ హౌస్ నుండి రెండు ఓడలను వరుసగా 30° మరియు 45°ల నిమ్న కోణాలతో గమనించడమైనది. లైట్ హౌస్ కు ఒకేవైపున రెండు ఓడలు ఖచ్చితంగా ఒక దాని వెనుక మరొకటి కలవు. ఆ రెండు ఓడల మధ్య దూరాన్ని కనుగొనండి.

14. 1.2 మీ. ఎత్తుగల బాలిక ఆకాశంలో క్షితిజసమాంతరంగా, గాలితో పాటు ప్రయాణిస్తున్న 88.2 మీ. ఎత్తులో గల బెలూన్ స్థానాన్ని 60° ఊర్ధ్వ కోణంలో గమనించినది. కొంత సమయం తరువాత ఆ ఊర్ధ్వ కోణం 30° గా మారింది (పటం 9.13 చూడండి). ఈ కొంత సమయంలో బెలూన్ ప్రయాణించిన దూరాన్ని కనుగొనండి.



పటం 9.13

15. ఒక టవర్ అడుగు భాగం చేరుకొనుటకు మలుపులు లేని ఒక తిన్నని రోడ్డు కలదు. టవర్ పైభాగం నుండి ఒక వ్యక్తి ఆ రోడ్డుపై టవర్ వైపునకు సమవేగంతో వస్తున్న కారును 30°ల నిమ్నకోణంతో గమనించాడు. 6 సెకండ్ల తర్వాత అదే కారును

tower with a uniform speed. Six seconds later, the angle of depression of the car is found to be 60°. Find the time taken by the car to reach the foot of the tower from this point.

9.2 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. (i) The **line of sight** is the line drawn from the eye of an observer to the point in the object viewed by the observer.

(ii) The **angle of elevation** of an object viewed, is the angle formed by the line of sight with the horizontal when it is above the horizontal level, i.e., the case when we raise our head to look at the object.

(iii) The **angle of depression** of an object viewed, is the angle formed by the line of sight with the horizontal when it is below the horizontal level, i.e., the case when we lower our head to look at the object.

2. The height or length of an object or the distance between two distant objects can be determined with the help of trigonometric ratios.

60°ల నిమ్నకోణంతో గమనించాడు. ఈ స్థానం నుండి కారు, టవర్‌ను చేరడానికి పట్టు కాలం ఎంత?

9.2 సారాంశము

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు క్రింది అంశాలను తెలుసుకున్నారు:

1. (i) పరిశీలకుని కన్ను నుండి, పరిశీలకుడు చూసిన వస్తువు యొక్క బిందువును కలుపుతూ గీసిన రేఖను **దృష్టి రేఖ** అంటాము.

(ii) క్షితిజ సమాంతర రేఖకు ఎగువన ఉన్న వస్తువును చూసే సందర్భంలో దృష్టిరేఖ, క్షితిజరేఖతో చేసే కోణాన్ని **ఊర్ధ్వకోణం** అంటాము. ఇది మనం తలను ఎత్తి వస్తువును చూసే సందర్భం.

(iii) క్షితిజ సమాంతర రేఖకు దిగువన ఉన్న వస్తువును చూసే సందర్భంలో దృష్టిరేఖ, క్షితిజరేఖతో చేసే కోణాన్ని **నిమ్నకోణం** అంటాము. ఇది మనం తలను దించి వస్తువును చూసే సందర్భం.

2. వస్తువు ఎత్తు లేదా పొడవు లేదా రెండు వేరువేరు వస్తువుల మధ్య దూరాలను త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల సహాయంతో కనుగొనవచ్చు.

1062CH10

CIRCLES 10

10.1 Introduction

You have studied in Class IX that a circle is a collection of all points in a plane which are at a constant distance (radius) from a fixed point (centre). You have also studied various terms related to a circle like chord, segment, sector, arc etc. Let us now examine the different situations that can arise when a circle and a line are given in a plane.

So, let us consider a circle and a line PQ. There can be three possibilities given in Fig. 10.1 below:

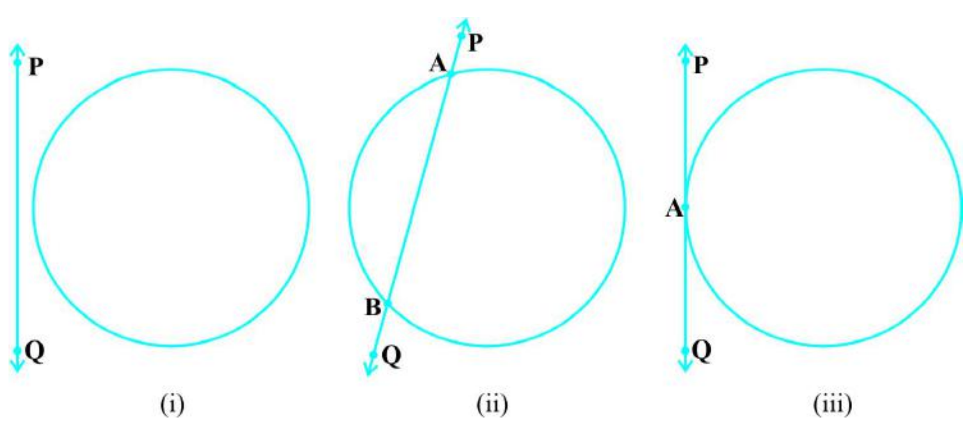


Fig. 10.1

In Fig. 10.1 (i), the line PQ and the circle have no common point. In this case, PQ is called a **non-intersecting** line with respect to the circle. In Fig. 10.1 (ii), there are two common points A and B that the line PQ and the circle have. In this case, we call the line PQ a **secant** of the circle. In Fig. 10.1 (iii), there is only one point A which is common to the line PQ and the circle. In this case, the line is called a **tangent** to the circle.

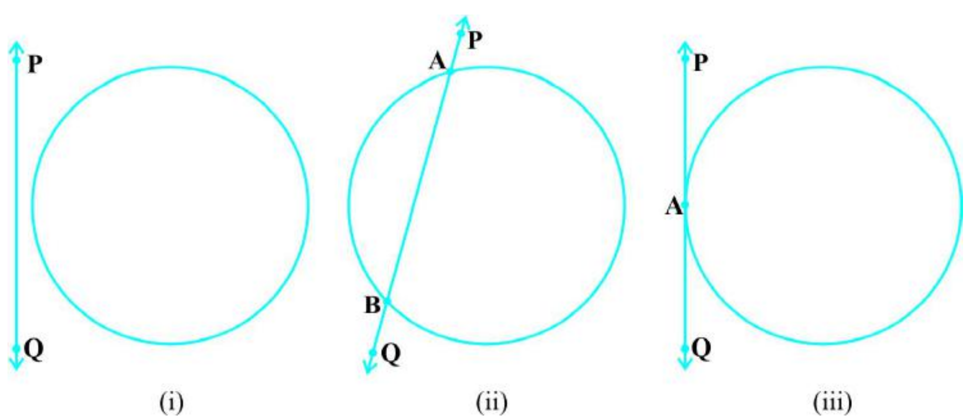
1062CH10

వృత్తాలు 10

10.1 పరిచయం

మీరు తొమ్మిదవ తరగతిలో వృత్తం అనేది 'ఒక తలంలో ఒక స్థిర బిందువు (కేంద్రము) నుండి స్థిర దూరం (వ్యాసార్థం)లో గల బిందువుల సముదాయం అని నేర్చుకున్నారు. మీరు వృత్తానికి సంబంధించిన వివిధ పదాలైన వృత్త జ్యా, వృత్త ఖండము, త్రిజ్యాంతరం, చాపము మొదలైన వాటిని కూడా అధ్యయనం చేశారు. ఒక తలంలో ఒక వృత్తము మరియు ఒక రేఖ ఉన్నప్పుడు ఏర్పడే విభిన్న పరిస్థితులను ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాం.

కాబట్టి, మనం ఒక వృత్తం మరియు PQ రేఖను తీసుకుందాం. కింద ఇవ్వబడిన పటం 10.1లో మూడు సాధనాలు కలవు:



పటం 10.1

పటం 10.1 (i) లో, PQ రేఖకు, వృత్తానికి ఉమ్మడి బిందువు లేదు. ఈ సందర్భంలో PQ ను, వృత్తానికి **అఖండిత రేఖ** అంటాము. పటం. 10.1 (ii) లో PQ రేఖకు, వృత్తానికి A మరియు B అనే రెండు ఉమ్మడి బిందువులు కలవు. ఈ సందర్భంలో PQ రేఖను వృత్తానికి **ఖండిత రేఖ** లేదా **ఛేదన రేఖ** అంటాము. పటం 10.1 (iii)లో, PQ రేఖకు, వృత్తానికి A అనే ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు ఏర్పడింది. ఈ సందర్భంలో PQ రేఖను వృత్తానికి **స్పర్శరేఖ** అంటాము.

You might have seen a pulley fitted over a well which is used in taking out water from the well. Look at Fig. 10.2. Here the rope on both sides of the pulley, if considered as a ray, is like a tangent to the circle representing the pulley.

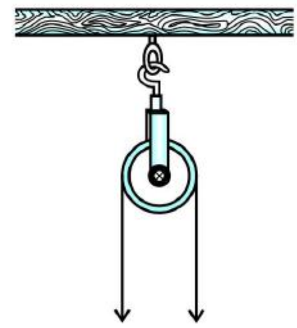


Fig. 10.2

Is there any position of the line with respect to the circle other than the types given above? You can see that there cannot be any other type of position of the line with respect to the circle. In this chapter, we will study about the existence of the tangents to a circle and also study some of their properties.

10.2 Tangent to a Circle

In the previous section, you have seen that **a tangent* to a circle is a line that intersects the circle at only one point**.

To understand the existence of the tangent to a circle at a point, let us perform the following activities:

Activity 1 : Take a circular wire and attach a straight wire AB at a point P of the circular wire so that it can rotate about the point P in a plane. Put the system on a table and gently rotate the wire AB about the point P to get different positions of the straight wire [see Fig. 10.3(i)].

In various positions, the wire intersects the circular wire at P and at another point Q_1 or Q_2 or Q_3, etc. In one position, you will see that it will intersect the circle at the point P only (see position A′B′ of AB). This shows that a tangent exists at the point P of the circle. On rotating further, you can observe that in all other positions of AB, it will intersect the circle at P and at another point, say R_1 or R_2 or R_3, etc. So, you can observe that **there is only one tangent at a point of the circle**.

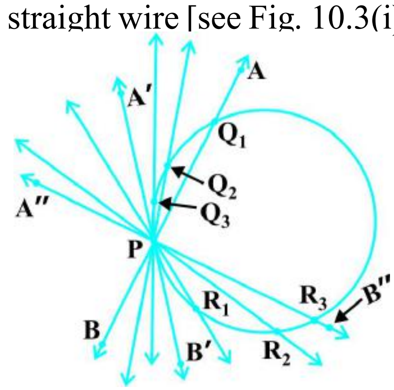


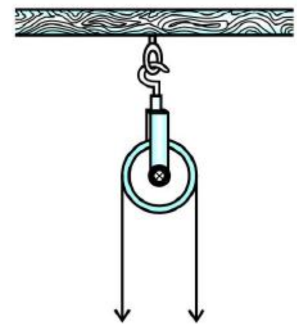
Fig. 10.3 (i)

While doing activity above, you must have observed that as the position AB moves towards the position A′ B′, the common point, say Q_1, of the line AB and the circle gradually comes nearer and nearer to the common point P. Ultimately, it coincides with the point P in the position A′B′ of A″B″. Again note, what happens if 'AB' is rotated rightwards about P? The common point R_3 gradually comes nearer and nearer to P and ultimately coincides with P. So, what we see is:

The tangent to a circle is a special case of the secant, when the two end points of its corresponding chord coincide.

*The word 'tangent' comes from the Latin word 'tangere', which means to touch and was introduced by the Danish mathematician Thomas Fineke in 1583.

బావి నుండి నీటిని బయటకు తీయడానికి ఉపయోగించే బావిపై అమర్చిన గిలకను మీరు చూసి ఉంటారు. పటం 10.2 చూడండి. ఇక్కడ గిలకకు ఇరువైపులా ఉన్న తాడును కిరణంగా పరిగణిస్తే, అది గిలకను సూచించే వృత్తానికి స్పర్శరేఖ లాంటిది.



పటం 10.2

వృత్తం దృష్ట్యా రేఖ యొక్క స్థానం పైన పేర్కొన్న రకాలుగా కాకుండా ఇంకా ఏదైనా ఉందా? వృత్తం దృష్ట్యా రేఖ యొక్క మరే విధమైన స్థానం ఉండదని మీరు చూడవచ్చు. ఈ అధ్యాయంలో, మనం ఒక వృత్తానికి స్పర్శరేఖల ఉనికి గురించి అధ్యయనం చేస్తాము మరియు వాటి యొక్క కొన్ని ధర్మాలను కూడా అధ్యయనం చేస్తాము.

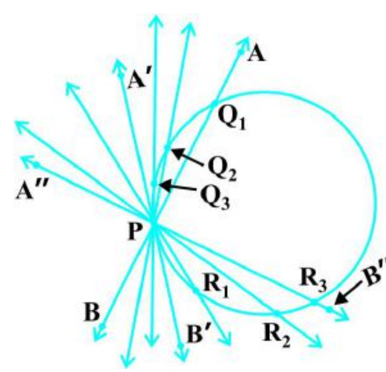
10.2 వృత్తానికి స్పర్శరేఖ

మునుపటి విభాగంలో, **ఒక వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అనేది కేవలం ఒక బిందువు వద్ద వృత్తాన్ని స్పర్శించే రేఖ** అని మీరు చూశారు.

ఒక బిందువు వద్ద వృత్తానికి స్పర్శరేఖ ఉనికిని అవగాహన చేసుకోవడానికి, మనం ఈ క్రింది కృత్యాలను చేద్దాం:

కృత్యము 1 : ఒక వృత్తాకార తీగను తీసుకొనండి. దానిపై ఒక బిందువు P వద్ద AB అనే తిన్నని మరొక తీగను తీసుకొని, అది P గుండా భ్రమణం చెందే విధంగా అమర్చండి. ఈ వ్యవస్థ (పరికరం)ను బల్లపై ఉంచి, P బిందువు ఆధారంగా AB తీగను నెమ్మదిగా తిప్పుతూ వివిధ స్థానాలు వచ్చునట్లు చేయండి. [పటం 10.3(i) చూడండి].

వివిధ స్థానాల్లో తీగ వృత్తాకార తీగను P వద్ద మరియు మరొక బిందువు Q_1 లేదా Q_2 లేదా Q_3 మొదలైన బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. ఒకానొక స్థానంలో అది P బిందువు వద్ద మాత్రమే వృత్తాన్ని ఖండిస్తుందని మీరు గమనిస్తారు (AB యొక్క స్థానం $A'B'$ ను చూడండి). ఇది వృత్తానికి P బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ ఉందని చూపిస్తుంది. మరింత తిరిగేటప్పుడు AB యొక్క అన్ని ఇతర స్థానాల్లో అది వృత్తాన్ని P వద్ద మరియు మరొక బిందువు R_1 లేదా R_2 లేదా R_3 మొదలైన బిందవుల వద్ద ఖండిస్తుందని మీరు గమనించవచ్చు. కాబట్టి, **వృత్తం మీద బిందువు వద్ద ఒకే ఒక స్పర్శరేఖ ఉందని మీరు గమనించవచ్చు.**



పటం 10.3 (i)

పై కృత్యం చేస్తున్నప్పుడు, AB స్థానం $A'B'$స్థానం వైపు కదులుతున్నప్పుడు AB రేఖ మరియు వృత్తముల ఉమ్మడి బిందువు Q_1 క్రమక్రమంగా ఉమ్మడి బిందువు P కు దగ్గర దగ్గరగా రావడాన్ని మీరు గమనించి ఉంటారు. అంతిమంగా, ఇది $A''B''$ యొక్క $A'B'$ స్థానంలోని బిందువుతో ఏకీభవిస్తుంది. మళ్ళీ గమనించండి, 'AB' ని P నుంచి కుడివైపుకు తిప్పినట్లయితే ఏమి జరుగుతుంది? ఉమ్మడి బిందువు R_3 క్రమక్రమంగా P కి దగ్గరగా వస్తుంది మరియు చివరకు P తో ఏకీభవిస్తుంది. కాబట్టి మనం గమనించినది ఏమనగా:

ఛేదనరేఖకు సంబంధించిన వృత్తజ్యా యొక్క చివరి రెండు బిందువులు ఏకీభవించిన ప్రత్యేక సందర్భంలో ఛేదనరేఖ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

---

* స్పర్శరేఖ ('tangent') అనే లాటిన్ పదం టాన్‌గ్రీ (tangere)అనే పదం నుండి వచ్చినది. దీని అర్థం స్పర్శించడం. ఈ పదాన్ని 1583 సం॥లో డెన్మార్క్ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు థామస్ ఫిన్కీ పరిచయం చేసాడు.

Activity 2 : On a paper, draw a circle and a secant PQ of the circle. Draw various lines parallel to the secant on both sides of it. You will find that after some steps, the length of the chord cut by the lines will gradually decrease, i.e., the two points of intersection of the line and the circle are coming closer and closer [see Fig. 10.3(ii)]. In one case, it becomes zero on one side of the secant and in another case, it becomes zero on the other side of the secant. See the positions P′Q′ and P″Q″ of the secant in Fig. 10.3 (ii). These are the tangents to the circle parallel to the given secant PQ. This also helps you to see that there cannot be more than two tangents parallel to a given secant.

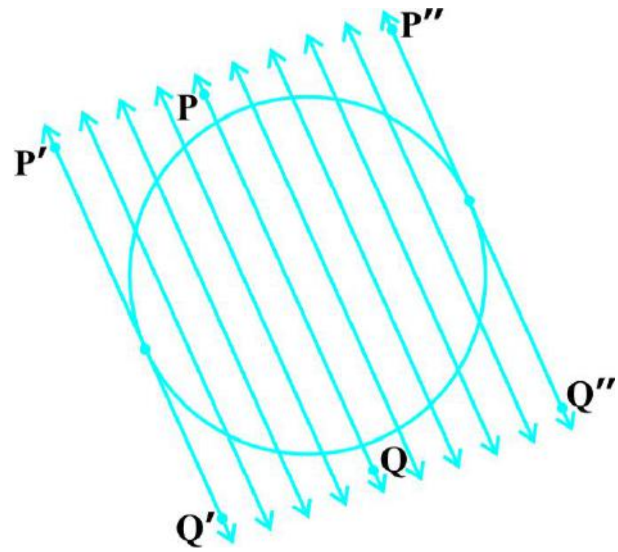


Fig. 10.3 (ii)

This activity also establishes, what you must have observed, while doing Activity 1, namely, a tangent is the secant when both of the end points of the corresponding chord coincide.

The common point of the tangent and the circle is called the **point of contact** [the point A in Fig. 10.1 (iii)]and the tangent is said to **touch** the circle at the common point.

Now look around you. Have you seen a bicycle or a cart moving? Look at its wheels. All the spokes of a wheel are along its radii. Now note the position of the wheel with respect to its movement on the ground. Do you see any tangent anywhere? (See Fig. 10.4). In fact, the wheel moves along a line which is a tangent to the circle representing the wheel. Also, notice that in all positions, the radius through the point of contact with the ground appears to be at right angles to the tangent (see Fig. 10.4). We shall now prove this property of the tangent.

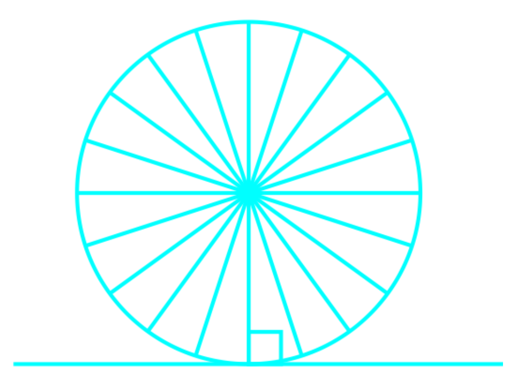
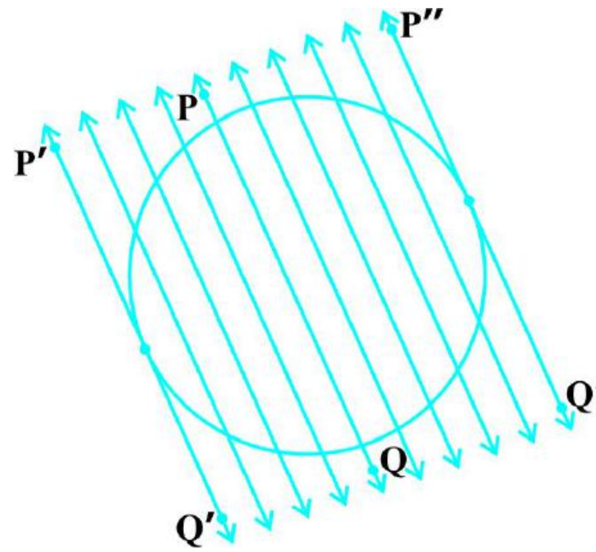


Fig. 10.4

Theorem 10.1 : *The tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius through the point of contact.*

Proof : We are given a circle with centre O and a tangent XY to the circle at a point P. We need to prove that OP is perpendicular to XY.

కృత్యము 2 : ఒక కాగితముపై వృత్తాన్ని గీచి, దానిపై PQ ఛేదనరేఖను గీయండి. ఈ ఛేదనరేఖకు సమాంతరంగా ఇరువైపులా మరికొన్ని రేఖలు గీయండి. కొన్ని సోపానాల తర్వాత రేఖలచే ఏర్పడిన వృత్త జ్యా పొడవు క్రమంగా తగ్గుతుందని మీరు కనుగొంటారు. అనగా, రేఖ మరియు వృత్తము యొక్క రెండు ఖండన బిందువులు దగ్గర, దగ్గరగా వస్తున్నాయి. [పటం. 10.3(ii) ను చూడండి]. ఒక సందర్భంలో, ఇది ఛేధన రేఖకు ఒక వైపు శూన్యమవుతుంది మరియు మరొక సందర్భంలో ఇది ఛేధన రేఖకు మరొక వైపు శూన్యమవుతుంది. పటం 10.3(ii)లో ఇవి ఛేదన రేఖ యొక్క $P'Q'$ మరియు $P''Q''$ స్థానాలను పరిశీలించండి. ఇది ఛేదనరేఖ PQ కు సమాంతరంగా వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు అగును. ఇవ్వబడిన ఛేదనరేఖకు సమాంతరంగా రెండు స్పర్శరేఖల కంటే ఎక్కువ ఉండవని గమనించడానికి ఇది సహాయపడుతుంది.

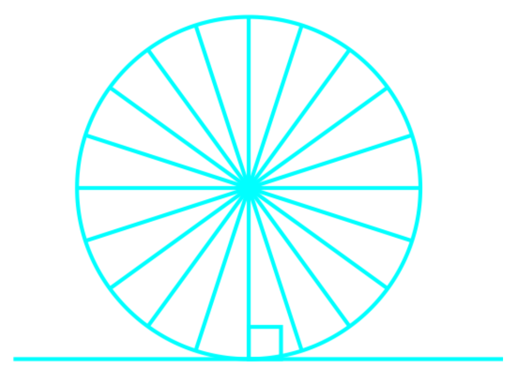


పటం 10.3 (ii)

ఈ కృత్యం, మీరు కృత్యం 1 చేస్తున్నప్పుడు తప్పనిసరిగా గమనించిన వాటిని కూడా నిర్ధారిస్తుంది. అనగా, ఛేదనరేఖకు సంబంధించిన జ్యా యొక్క చివరి బిందువులు రెండూ ఏకీభవించినప్పుడు ఆ ఛేదనరేఖయే స్పర్శరేఖ అవుతుంది అని మీరు గమనించవచ్చు.

స్పర్శరేఖ మరియు వృత్తముల ఉమ్మడి బిందువును **స్పర్శ బిందువు** అంటారు. [పటం. 10.1 (iii) లో బిందువు A] మరియు స్పర్శరేఖ ఉమ్మడి బిందువు వద్ద వృత్తాన్ని **స్పర్శిస్తుంది.**

ఇప్పుడు మీ చుట్టూ చూడండి. మీరు సైకిల్ లేదా బండి కదులుతున్నప్పుడు చూశారా? వాటి చక్రాలను చూడండి. చక్రం యొక్క చువ్వలన్నీ దానికి వ్యాసార్ధాలవలె ఉంటాయి. ఇప్పుడు భూమిపై దాని కదలిక దృష్ట్యా చక్రం యొక్క స్థానాన్ని గమనించండి. మీకు ఎక్కడైనా స్పర్శరేఖ కనిపిస్తుందా? (పటం. 10.4 చూడండి). వాస్తవానికి చక్రాన్ని సూచించే వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అయినటువంటి రేఖ వెంబడి చక్రం కదులుతుంది. అలాగే అన్ని స్థానాలలో భూమిని తాకిన బిందువు వద్ద వ్యాసార్ధం, స్పర్శరేఖతో లంబకోణం చేయడాన్ని గమనించండి. (పటం. 10.4 చూడండి). మనం ఇప్పుడు స్పర్శరేఖ యొక్క ఈ ధర్మాన్ని నిరూపిద్దాం.


పటం 10.4

సిద్ధాంతము 10.1 : *ఒక వృత్తముపై గల ఏదైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్ధానికి లంబముగా ఉంటుంది.*

నిరూపణ : మనకు O కేంద్రముగా గల వృత్తానికి P బిందువు వద్ద XY స్పర్శరేఖ ఇవ్వబడినది. మనం OP, XY నకు లంబముగా ఉందని నిరూపించాలి.

Take a point Q on XY other than P and join OQ (see Fig. 10.5).

The point Q must lie outside the circle. (Why? Note that if Q lies inside the circle, XY will become a secant and not a tangent to the circle). Therefore, OQ is longer than the radius OP of the circle. That is,

$$OQ > OP.$$

Since this happens for every point on the line XY except the point P, OP is the shortest of all the distances of the point O to the points of XY. So OP is perpendicular to XY. (as shown in Theorem A1.7.)

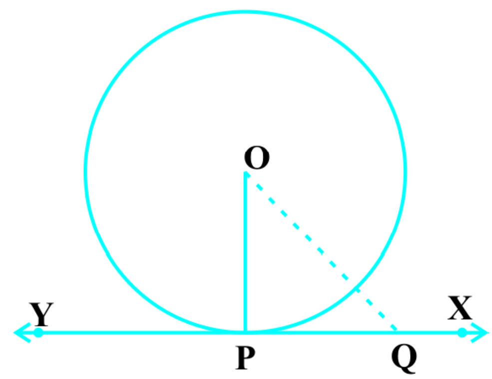


Fig. 10.5

Remarks

1. By theorem above, we can also conclude that at any point on a circle there can be one and only one tangent.
2. The line containing the radius through the point of contact is also sometimes called the 'normal' to the circle at the point.

EXERCISE 10.1

1. How many tangents can a circle have?

2. Fill in the blanks :

(i) A tangent to a circle intersects it in ________ point (s).

(ii) A line intersecting a circle in two points is called a ________ .

(iii) A circle can have ________ parallel tangents at the most.

(iv) The common point of a tangent to a circle and the circle is called ________ .

3. A tangent PQ at a point P of a circle of radius 5 cm meets a line through the centre O at a point Q so that OQ = 12 cm. Length PQ is :

(A) 12 cm (B) 13 cm (C) 8.5 cm (D) $\sqrt{119}$ cm.

4. Draw a circle and two lines parallel to a given line such that one is a tangent and the other, a secant to the circle.

10.3 Number of Tangents from a Point on a Circle

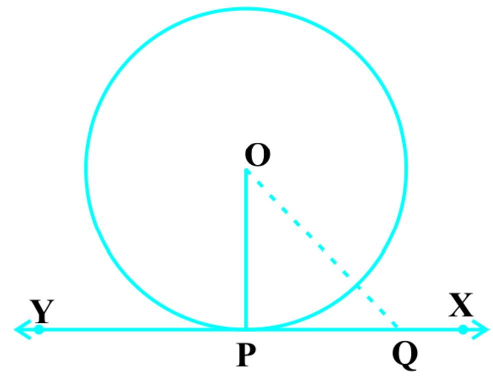
To get an idea of the number of tangents from a point on a circle, let us perform the following activity:

XY పై P కాకుండా మరొక బిందువు Q ను తీసుకొని, OQ ను కలుపుదాం. (పటం. 10.5 చూడండి).

Q బిందువు ఖచ్చితంగా వృత్తానికి బాహ్యంలోని ఉంటుంది. (ఎందుకు? Q ఒక వేళ వృత్త అంతరంలో వుంటే XY అనేది వృత్తానికి స్పర్శరేఖ కాకుండా ఛేదన రేఖ అవుతుందని గమనించండి). అందువలన, OQ అనేది వ్యాసార్థం OP కన్నా పొడవుగా ఉంటుంది.

అంటే $OQ > OP$.

బిందువు P కి తప్ప XY పైన గల ఏ ఇతర బిందువులకైన ఇది వర్తిస్తుంది. అందుచే O నుండి XY పైకి గీయబడిన అన్ని పొడవులలో OP మాత్రమే మిక్కిలి చిన్నది అగును. కాబట్టి OP, XY కు లంబముగా ఉంటుంది. (సిద్ధాంతము A1.7 లో చూపిన విధంగా)



పటం 10.5

సూచనలు

1. పై సిద్ధాంతము ద్వారా, ఒక వృత్తంపై గల ఏదైనా బిందువు వద్ద ఒకే ఒక స్పర్శరేఖ మాత్రమే ఉంటుందని కూడా మనం నిర్ధారించవచ్చు.
2. వృత్త వ్యాసార్ధానికి స్పర్శబిందువు గుండా గీయబడిన రేఖను ఆ వృత్తానికి ఆ బిందువు వద్ద అభిలంబం (normal)అని కూడా అంటారు.

అభ్యాసం 10.1

1. ఒక వృత్తం ఎన్ని స్పర్శరేఖలను కలిగి ఉంటుంది?

2. కింది ఖాళీలను పూరించండి :

(i) వృత్తాన్ని, ఒక స్పర్శరేఖ ___________ బిందువు (ల) వద్ద ఖండిస్తుంది.

(ii) వృత్తాన్ని ఒక రేఖ రెండు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే దానిని ___________ అంటారు.

(iii) ఒక వృత్తం గరిష్ఠంగా ___________ సమాంతరరేఖలను కలిగి ఉంటుంది.

(iv) ఒక వృత్తానికి, దాని స్పర్శరేఖకు గల ఉమ్మడి బిందువును ___________ అంటారు.

3. 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగా గల వృత్తాన్ని PQ స్పర్శరేఖ P వద్ద తాకింది. వృత్త కేంద్రము O నుండి స్పర్శరేఖపై గల బిందువు Q నకు దూరము OQ = 12 సెం.మీ. అయిన PQ పొడవు:

(A) 12 సెం.మీ. (B) 13 సెం.మీ. (C) 8.5 సెం.మీ. (D) $\sqrt{119}$ సెం.మీ.

4. ఒక వృత్తాన్ని గీచి, ఆ వృత్తానికి బాహ్యంగా కల ఒకరేఖకు సమాంతరంగా; ఈ వృత్తానికి ఒక స్పర్శరేఖనూ మరియు ఒక ఛేదనరేఖను గీయండి.

10.3 ఏదైనా బిందువు నుండి వృత్తానికి గీయదగు స్పర్శరేఖలు

ఒక తలములో ఏదైనా బిందువు నుండి వృత్తానికి గీయగలిగే స్పర్శరేఖల సంఖ్యను కింది కృత్యాన్ని చేసి తెలుసుకుందాము:

Activity 3 : Draw a circle on a paper. Take a point P inside it. Can you draw a tangent to the circle through this point? You will find that all the lines through this point intersect the circle in two points. So, it is not possible to draw any tangent to a circle through a point inside it [see Fig. 10.6 (i)].

Next take a point P on the circle and draw tangents through this point. You have already observed that there is only one tangent to the circle at such a point [see Fig. 10.6 (ii)].

Finally, take a point P outside the circle and try to draw tangents to the circle from this point. What do you observe? You will find that you can draw exactly two tangents to the circle through this point [see Fig. 10.6 (iii)].

We can summarise these facts as follows:

Case 1 : There is no tangent to a circle passing through a point lying inside the circle.

Case 2 : There is one and only one tangent to a circle passing through a point lying on the circle.

Case 3 : There are exactly two tangents to a circle through a point lying outside the circle.

In Fig. 10.6 (iii), T_1 and T_2 are the points of contact of the tangents PT_1 and PT_2 respectively.

The length of the segment of the tangent from the external point P and the point of contact with the circle is called the **length of the tangent** from the point P to the circle.

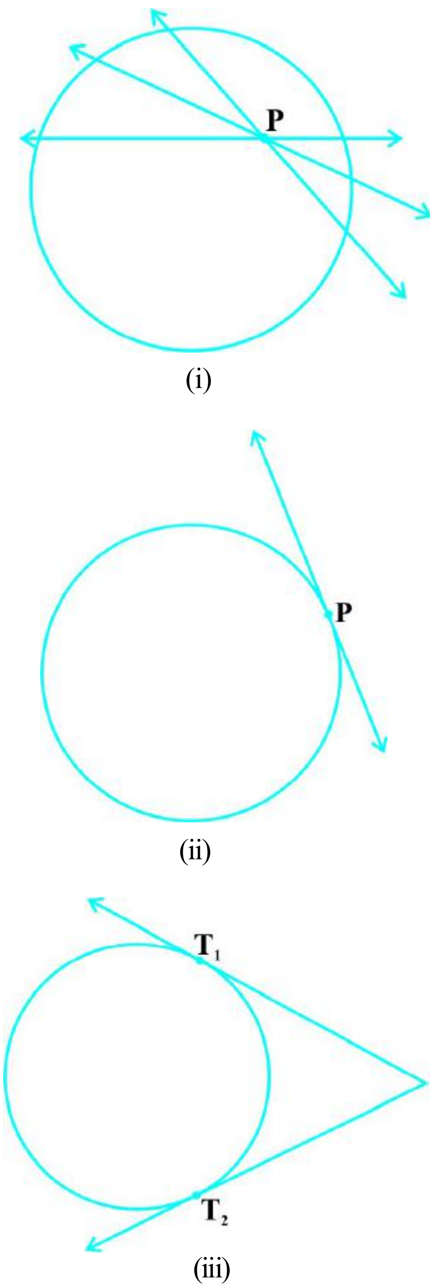


Fig. 10.6

Note that in Fig. 10.6 (iii), PT_1 and PT_2 are the lengths of the tangents from P to the circle. The lengths PT_1 and PT_2 have a common property. Can you find this? Measure PT_1 and PT_2. Are these equal? In fact, this is always so. Let us give a proof of this fact in the following theorem.

కృత్యము 3 : కాగితంపై ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. దాని అంతరములో P అనే బిందువును తీసుకోండి. మీరు ఈ బిందువు గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖ గీయగలరా? ఈ బిందువు గుండా గీచే రేఖలన్నియూ వృత్తాన్ని రెండు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తాయని మీరు తెలుసుకుంటారు. అందుచేత వృత్త అంతరంలో గల ఏ బిందువు గుండానైననూ వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయుట సాధ్యము కాదు. [పటం 10.6 (i) చూడండి].

ఇప్పుడు వృత్తపరిధిపై P అనే బిందువును తీసుకొని దాని నుండి స్పర్శరేఖలను గీయండి. ఈ బిందువు గుండా వృత్తానికి ఒకే ఒక స్పర్శరేఖ గీయగలరని మీరు పరిశీలించే ఉంటారు. [పటం 10.6 (ii) చూడండి].

చివరిగా, వృత్తానికి బాహ్యములో P బిందువును తీసుకొని ఆ బిందువు నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయడానికి ప్రయత్నించండి. మీరు ఏమి గమనించారు? మీరు ఖచ్చితంగా రెండు స్పర్శరేఖలను మాత్రమే ఈ బాహ్యబిందువు నుండి గీయగలమని తెలుసుకుంటారు. [పటం 10.6 (iii) చూడండి].

మనం చేసిన కృత్యము ద్వారా క్రింది ఫలితాలను సాధారణీకరించవచ్చును :

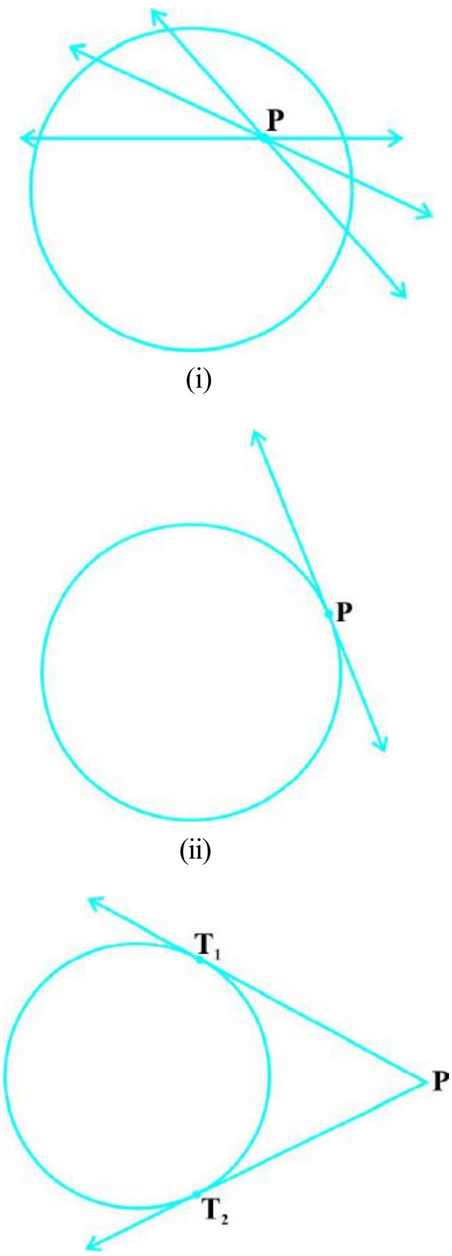
సందర్భం 1 : వృత్త అంతరములో గల ఏ బిందువు గుండానైనా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయలేము.

సందర్భం 2 : వృత్తముపై గల ఏ బిందువు గుండానైనా పోవునట్లు వృత్తానికి ఒకే ఒక స్పర్శరేఖను గీయవచ్చును.

సందర్భం 3 : వృత్త బాహ్యంలో గల ఏదైనా బిందువు గుండా వృత్తానికి ఖచ్చితముగా రెండు స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చును.

పటం 10.6 (iii) లో వృత్తానికి T_1 మరియు T_2 లు వరుసగా PT_1, PT_2 లు స్పర్శరేఖ యొక్క స్పర్శ బిందువులు.

వృత్తంలో బాహ్యబిందువు P నుండి స్పర్శబిందువునకు గీయబడిన రేఖాఖండం యొక్క పొడవును ఆ వృత్తానికి గీయబడిన **స్పర్శరేఖ పొడవు** అంటాము.



(i) (ii) (iii)

పటం 10.6

పటం 10.6 (iii) లో PT_1 మరియు PT_2 లు బాహ్య బిందువు P నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు అవుతాయని గమనించండి. PT_1 మరియు PT_2 పొడవులు ఒక సామాన్య ధర్మాన్ని కలిగి ఉంటాయి. మీరు దీనిని కనుగొనగలరా? PT_1 మరియు PT_2 లను కొలవండి. ఇవి సమానమా? నిజానికి, ఇవి ఎల్లప్పుడూ సమానంగా ఉంటాయి. కింది సిద్ధాంతములో ఈ వాస్తవాన్ని నిరూపిద్దాం.

Theorem 10.2 : *The lengths of tangents drawn from an external point to a circle are equal.*

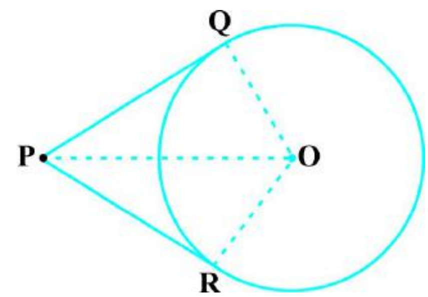


Fig. 10.7

Proof : We are given a circle with centre O, a point P lying outside the circle and two tangents PQ, PR on the circle from P (see Fig. 10.7). We are required to prove that PQ = PR.

For this, we join OP, OQ and OR. Then $\angle$ OQP and $\angle$ ORP are right angles, because these are angles between the radii and tangents, and according to Theorem 10.1 they are right angles. Now in right triangles OQP and ORP,

	OQ = OR	(Radii of the same circle)
	OP = OP	(Common)
Therefore,	Δ OQP $\cong$ Δ ORP	(RHS)
This gives	PQ = PR	(CPCT)

Remarks

1. The theorem can also be proved by using the Pythagoras Theorem as follows:

$$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2 \text{ (As } OQ = OR)$$

which gives PQ = PR.

2. Note also that $\angle$ OPQ = $\angle$ OPR. Therefore, OP is the angle bisector of $\angle$ QPR, i.e., the centre lies on the bisector of the angle between the two tangents.

Let us take some examples.

Example 1 : Prove that in two concentric circles, the chord of the larger circle, which touches the smaller circle, is bisected at the point of contact.

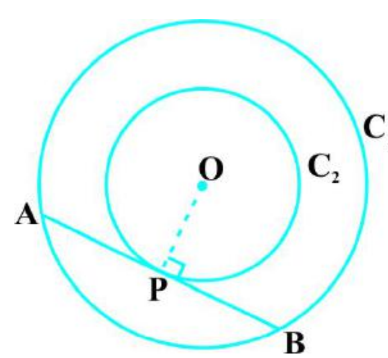


Fig. 10.8

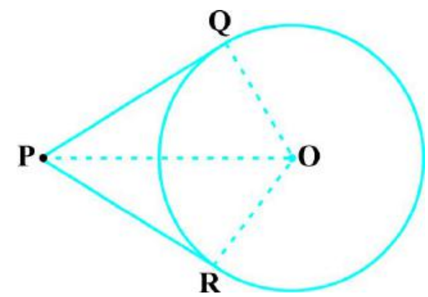
Solution : We are given two concentric circles C_1 and C_2 with centre O and a chord AB of the larger circle C_1 which touches the smaller circle C_2 at the point P (see Fig. 10.8). We need to prove that AP = BP.

Let us join OP. Then, AB is a tangent to C_2 at P and OP is its radius. Therefore, by Theorem 10.1,

$$OP \perp AB$$

సిద్ధాంతము 10.2 : *వృత్తానికి బాహ్య బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.*

నిరూపణ : O కేంద్రముగా గల వృత్తానికి, P అనే బిందువు బాహ్యంలో కలదు. P బిందువు గుండా వృత్తానికి గీయబడిన రెండు స్పర్శరేఖలు PQ మరియు PR (పటం 10.7 చూడండి). మనం PQ = PR అగునని నిరూపించాలి.



పటం 10.7

దీని కొరకు మనం OP, OQ మరియు OR లను కలుపుదాం. అప్పుడు $\angle$ OQP మరియు $\angle$ ORP లు లంబకోణాలు. ఎందుకనగా ఇవి వృత్త వ్యాసార్ధానికి, స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణాలు. సిద్ధాంతము 10.1 ప్రకారం అవి లంబకోణములు. ఇప్పుడు లంబకోణ త్రిభుజాలు OQP మరియు ORP లలో,

$OQ = OR$ (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు)

$OP = OP$ (ఉమ్మడి భుజము)

అందువలన, $\Delta OQP \cong \Delta ORP$ (లం.క.భు. స్వీకృతం)

దీని నుండి $PQ = PR$ (సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సరూప భాగాలు)

సూచనలు

1. క్రింది విధంగా పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి కూడా పై సిద్ధాంతమును నిరూపించవచ్చు:

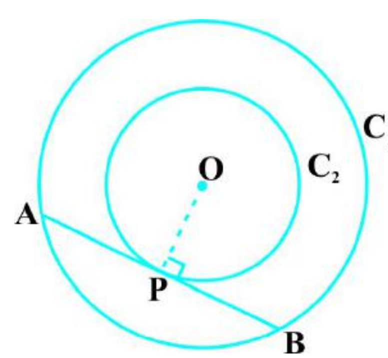
$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ ($OQ = OR$ కాబట్టి)

$\Rightarrow PQ = PR$ అగును.

2. $\angle OPQ = \angle OPR$ కావున OP అనేది $\angle QPR$ యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖ అని కూడా గమనించండి. అనగా, వృత్త కేంద్రము స్పర్శరేఖల మధ్య ఏర్పడిన కోణం యొక్క సమద్విఖండనరేఖపై ఉండునని చెప్పవచ్చును.

మనం కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 1 : రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలలో బాహ్య వృత్తము యొక్క జ్యా, అంతర వృత్తము యొక్క స్పర్శ బిందువు వద్ద సమద్విఖండన అగునని నిరూపించండి.



పటం 10.8

సాధన : O కేంద్రముగా గల రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలు C_1 మరియు C_2 అని ఇవ్వబడినవి. C_1 వృత్తము యొక్క జ్యా AB, చిన్న వృత్తము C_2ను బిందువు P వద్ద తాకింది (పటం 10.8 చూడండి). మనము AP = BP అని నిరూపించాలి.

O, P లను కలుపుదాం. C_2 వృత్తానికి AB స్పర్శరేఖ మరియు OP వ్యాసార్థము. కావున సిద్ధాంతము 10.1 ప్రకారము,

$OP \perp AB$ అగును.

Now AB is a chord of the circle C_1 and $OP \perp AB$. Therefore, OP is the bisector of the chord AB, as the perpendicular from the centre bisects the chord,

i.e., $AP = BP$

Example 2 : Two tangents TP and TQ are drawn to a circle with centre O from an external point T. Prove that $\angle PTQ = 2 \angle OPQ$.

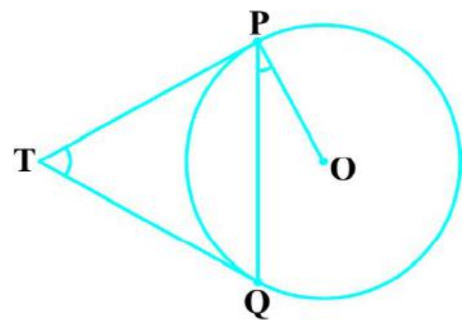


Fig. 10.9

Solution : We are given a circle with centre O, an external point T and two tangents TP and TQ to the circle, where P, Q are the points of contact (see Fig. 10.9). We need to prove that

$$\angle PTQ = 2 \angle OPQ$$

Let $\angle PTQ = \theta$

Now, by Theorem 10.2, TP = TQ. So, TPQ is an isosceles triangle.

Therefore, $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180° - \theta) = 90° - \frac{1}{2}\theta$

Also, by Theorem 10.1, $\angle OPT = 90°$

So, $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90° - \left(90° - \frac{1}{2}\theta\right)$

$$= \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$$

This gives $\angle PTQ = 2 \angle OPQ$

Example 3 : PQ is a chord of length 8 cm of a circle of radius 5 cm. The tangents at P and Q intersect at a point T (see Fig. 10.10). Find the length TP.

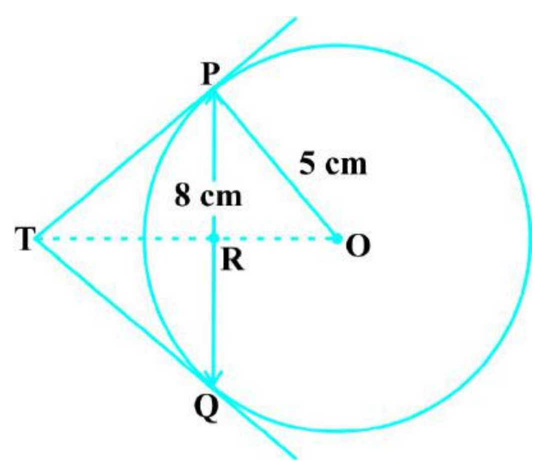


Fig. 10.10

Solution : Join OT. Let it intersect PQ at the point R. Then Δ TPQ is isosceles and TO is the angle bisector of $\angle PTQ$. So, $OT \perp PQ$ and therefore, OT bisects PQ which gives PR = RQ = 4 cm.

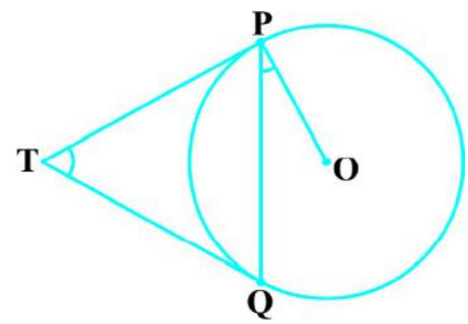
Also, $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$ cm = 3 cm.

ఇప్పుడు AB, C_1 వృత్తము యొక్క జ్యా మరియు $OP \perp AB$. OP అనేది కేంద్రము నుండి గీయబడిన లంబము కావున అది AB జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది.

అనగా, $AP = BP$

ఉదాహరణ 2 : O కేంద్రముగా గల వృత్తానికి బాహ్యబిందువు T నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు TP మరియు TQ అయిన $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ అని నిరూపించండి.

సాధన : O కేంద్రముగా గల వృత్తానికి బాహ్యబిందువు T నుండి రెండు స్పర్శరేఖలు TP మరియు TQ లు గీయబడ్డాయి. ఇందులో P, Q లు స్పర్శ బిందువులు (పటం 10.9 చూడండి).



పటం 10.9

మనము $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ అని నిరూపించాలి.

$\angle PTQ = \theta$ గా తీసుకుందాము.

ఇప్పుడు సిద్ధాంతము 10.2 ప్రకారము, $TP = TQ$ అగును. కావున త్రిభుజం TPQ ఒక సమద్విబాహుత్రిభుజం అగును.

అందుచే, $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$

ఇదే విధంగా, సిద్ధాంతము 10.1 ప్రకారం $\angle OPT = 90^\circ$

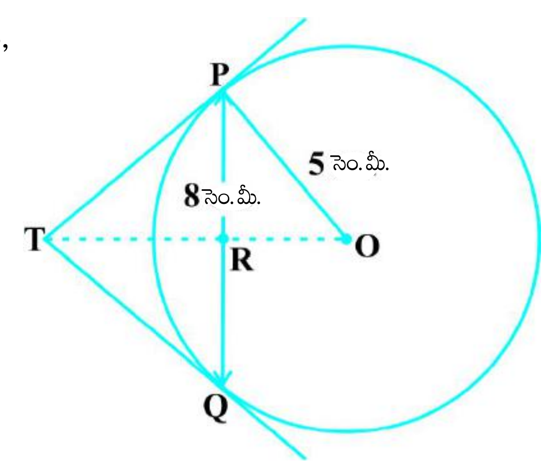
కావున, $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)$

$$= \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$$

దీని నుండి $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ అగును,

ఉదాహరణ 3 : 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో PQ జ్యా పొడవు 8సెం.మీ. P మరియు Q గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖలు T వద్ద ఖండించుకున్నాయి (పటం 10.10 చూడండి). అయిన TP పొడవును కనుగొనండి.

సాధన : O, T లను కలపండి. అది PQ ను బిందువు R వద్ద ఖండించినదనుకుందాం. అప్పుడు Δ TPQ సమద్విబాహు త్రిభుజం అగును మరియు TO అనునది $\angle PTQ$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ. కావున, $OT \perp PQ$ అందుచే $PR = RQ = 4$ సెం.మీ. అగునట్లు PQ ను OT సమద్విఖండన చేస్తుంది.



పటం 10.10

ఇదేవిధంగా, $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$ సెం.మీ. 3 సెం.మీ.

Now, $\angle$ TPR + $\angle$ RPO = 90° = $\angle$ TPR + $\angle$ PTR (Why?)

So, $\angle$ RPO = $\angle$ PTR

Therefore, right triangle TRP is similar to the right triangle PRO by AA similarity.

This gives $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$, i.e., $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ or TP = $\frac{20}{3}$ cm.

Note : TP can also be found by using the Pythagoras Theorem, as follows:

Let TP = x and TR = y. Then

$$x^2 = y^2 + 16 \quad \text{(Taking right } \Delta \text{ PRT)} \quad (1)$$

$$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2 \quad \text{(Taking right } \Delta \text{ OPT)} \quad (2)$$

Subtracting (1) from (2), we get

$$25 = 6y - 7 \quad \text{or} \quad y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

Therefore, $x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16 + 9) = \frac{16 \times 25}{9}$ [From (1)]

or $x = \frac{20}{3}$

EXERCISE 10.2

In Q.1 to 3, choose the correct option and give justification.

1. From a point Q, the length of the tangent to a circle is 24 cm and the distance of Q from the centre is 25 cm. The radius of the circle is

   (A) 7 cm (B) 12 cm

   (C) 15 cm (D) 24.5 cm

2. In Fig. 10.11, if TP and TQ are the two tangents to a circle with centre O so that $\angle$ POQ = 110°, then $\angle$ PTQ is equal to

   (A) 60° (B) 70°

   (C) 80° (D) 90°

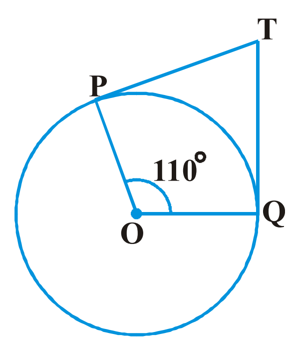


Fig. 10.11

3. If tangents PA and PB from a point P to a circle with centre O are inclined to each other at angle of 80°, then $\angle$ POA is equal to

   (A) 50° (B) 60°

   (C) 70° (D) 80°

ఇప్పుడు, $\angle TPR + \angle RPO = 90° = \angle TPR + \angle PTR$ (ఎందుకు?)

కావున, $\angle RPO = \angle PTR$

అందుచే, కో.కో సరూప నియమం ప్రకారం లంబకోణ త్రిభుజం TRP, లంబకోణ త్రిభుజం PRO కు సరూపం అగును.

దీని నుండి $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$. అనగా, $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ లేదా $TP = \frac{20}{3}$ సెం.మీ.

గమనిక : క్రింది విధంగా పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి కూడా TPని కనుగొనవచ్చు.

$TP = x$ మరియు $TR = y$ అనుకొనుము.

అప్పుడు $x^2 = y^2 + 16$ (లంబకోణ త్రిభుజం PRT ను తీసుకోండి) (1)

$x^2 + 5^2 = (y+3)^2$ (లంబకోణ త్రిభుజం OPT ను తీసుకోండి) (2)

(2) నుండి (1)ను తీసివేయగా,

$$25 = 6y - 7 \quad \text{లేదా} \quad y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

అందుచే, $x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16+9) = \frac{16 \times 25}{9}$ [(1) నుండి]

లేదా $x = \frac{20}{3}$

అభ్యాసం 10.2

ప్రశ్న 1 నుండి 3 వరకు సరైన జవాబును ఎంపిక చేసుకొని, జవాబును సమర్థించండి.

1. Q అనే బిందువు నుండి వృత్తం మీదకు గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవు 24 సెం.మీ. మరియు వృత్త కేంద్రము నుండి Q బిందువుకు గల దూరం 25 సెం.మీ. అయిన వృత్త వ్యాసార్థము

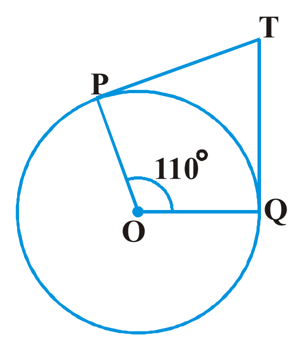
(A) 7 సెం.మీ. (B) 12 సెం.మీ.

(C) 15 సెం.మీ. (D) 24.5 సెం.మీ.

2. పటం. 10.11లో O కేంద్రముగా గల వృత్తానికి TP మరియు TQ లు రెండు స్పర్శరేఖలు మరియు $\angle POQ = 110°$ అయిన $\angle PTQ =$

(A) 60° (B) 70°

(C) 80° (D) 90°



పటం 10.11

3. O కేంద్రముగా గల వృత్తానికి బిందువు P నుండి PA మరియు PB అనే రెండు స్పర్శరేఖలు గీయబడ్డాయి. స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము 80° అయిన $\angle POA =$

(A) 50° (B) 60°

(C) 70° (D) 80°

4. Prove that the tangents drawn at the ends of a diameter of a circle are parallel.

5. Prove that the perpendicular at the point of contact to the tangent to a circle passes through the centre.

6. The length of a tangent from a point A at distance 5 cm from the centre of the circle is 4 cm. Find the radius of the circle.

7. Two concentric circles are of radii 5 cm and 3 cm. Find the length of the chord of the larger circle which touches the smaller circle.

8. A quadrilateral ABCD is drawn to circumscribe a circle (see Fig. 10.12). Prove that

$$AB + CD = AD + BC$$

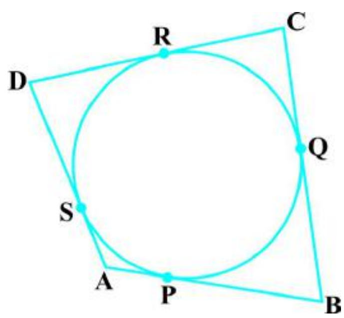


Fig. 10.12

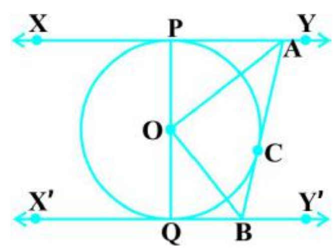


Fig. 10.13

9. In Fig. 10.13, XY and X′Y′ are two parallel tangents to a circle with centre O and another tangent AB with point of contact C intersecting XY at A and X′Y′ at B. Prove that $\angle AOB = 90°$.

10. Prove that the angle between the two tangents drawn from an external point to a circle is supplementary to the angle subtended by the line-segment joining the points of contact at the centre.

11. Prove that the parallelogram circumscribing a circle is a rhombus.

12. A triangle ABC is drawn to circumscribe a circle of radius 4 cm such that the segments BD and DC into which BC is divided by the point of contact D are of lengths 8 cm and 6 cm respectively (see Fig. 10.14). Find the sides AB and AC.

13. Prove that opposite sides of a quadrilateral circumscribing a circle subtend supplementary angles at the centre of the circle.

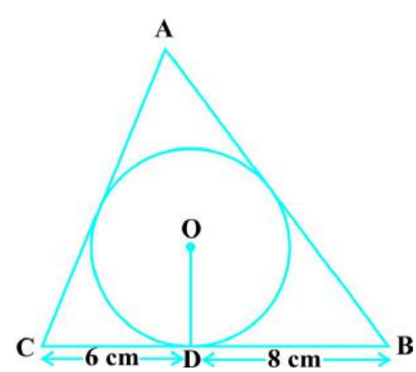


Fig. 10.14

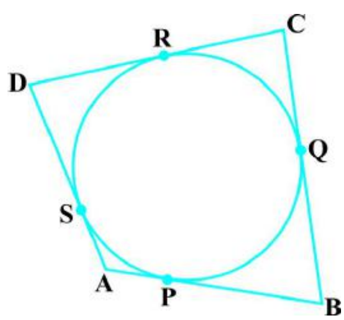
4. ఒక వృత్త వ్యాసము చివర బిందువుల వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖలు సమాంతరమని చూపండి.

5. వృత్త స్పర్శరేఖకు, స్పర్శబిందువు వద్ద గీయబడిన లంబము వృత్త కేంద్రము గుండా పోతుందని నిరూపించండి.

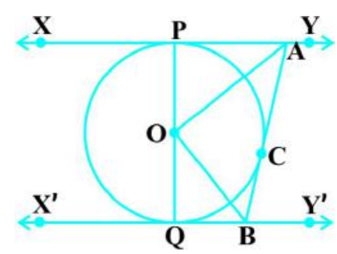
6. వృత్త కేంద్రము నుండి 5 సెం.మీ. దూరములో గల బిందువు A నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవు 4సెం.మీ. అయిన వృత్త వ్యాసార్ధమును కనుగొనండి.

7. 5 సెం.మీ. మరియు 3 సెం.మీ. వ్యాసార్ధములతో రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాలు గీయబడ్డాయి. చిన్న వృత్తాన్ని స్పర్శించే పెద్ద వృత్తము యొక్క జ్యా పొడవును కనుగొనండి.

8. ABCD చతుర్భుజంలో వృత్తము అంతర్లిఖించబడినది (పటం 10.12 చూడండి) అయిన $AB + CD = AD + BC$ అని నిరూపించండి.



పటం 10.12



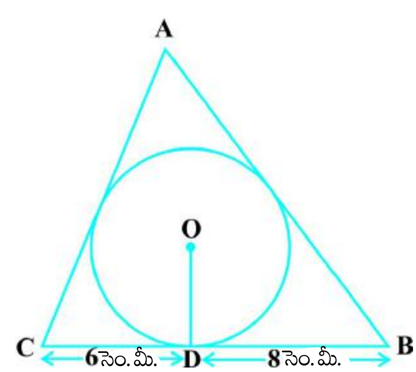
పటం 10.13

9. పటం 10.13లో O కేంద్రముగా గల వృత్తానికి XY మరియు X′Y′ అనే రెండు సమాంతర స్పర్శరేఖలు గీయబడ్డాయి. మరొక స్పర్శరేఖ AB, స్పర్శబిందువు C గుండా పోతూ XY ను A వద్ద మరియు X′Y′ ను B వద్ద ఖండించినది. అయిన $\angle AOB = 90^\circ$ అని నిరూపించండి.

10. బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తము పైకి గీయబడిన రెండు స్పర్శరేఖల మధ్య కోణము మరియు రెండు స్పర్శ బిందువులను కేంద్రముతో కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండాలు ఏర్పరిచిన కోణానికి సంపూరకమని నిరూపించండి.

11. ఒక సమాంతర చతుర్భుజములో వృత్తము అంతర్లిఖించబడిన, అది సమచతుర్భుజము అగునని చూపండి.

12. త్రిభుజం ABC లో 4సెం.మీ. వ్యాసార్ధము గల వృత్తము అంతర్లిఖించబడింది. స్పర్శ బిందువు D, BC భుజాన్ని రెండు రేఖాఖండాలుగా BD = 8 సెం.మీ., DC = 6 సెం.మీ.గా విభజించింది. (పటం 10.14 చూడండి). అయిన AB మరియు AC భుజాల పొడవులు కనుగొనండి.



పటం 10.14

13. ఒక చతుర్భుజములో వృత్తము దాని నాలుగు భుజాలను తాకుతూ అంతర్లిఖించబడి వున్నచో ఆ చతుర్భుజము ఎదుటి భుజాలు వృత్త కేంద్రము వద్ద చేయు కోణాలు సంపూరకాలు అని నిరూపించండి.

10.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. The meaning of a tangent to a circle.

2. The tangent to a circle is perpendicular to the radius through the point of contact.

3. The lengths of the two tangents from an external point to a circle are equal.

10.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయములో, మీరు క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు:

1. వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ నిర్వచనము.

2. వృత్తము పై గల ఏదైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శబిందువు వద్ద వ్యాసార్ధానికి లంబముగా ఉంటుంది.

3. వృత్తానికి బాహ్య బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.

1062CH12

AREAS RELATED TO CIRCLES 11

11.1 Areas of Sector and Segment of a Circle

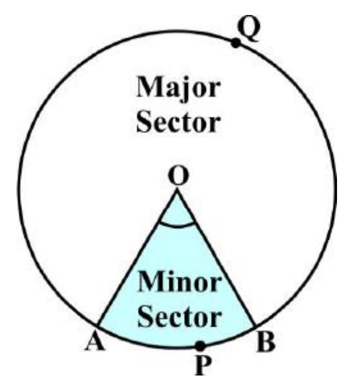


Fig. 11.1

You have already come across the terms *sector* and *segment* of a circle in your earlier classes. Recall that the portion (or part) of the circular region enclosed by two radii and the corresponding arc is called a *sector* of the circle and the portion (or part) of the circular region enclosed between a chord and the corresponding arc is called a *segment* of the circle. Thus, in Fig. 11.1, shaded region OAPB is a *sector* of the circle with centre O. $\angle$ AOB is called the *angle* of the sector. Note that in this figure, unshaded region OAQB is also a sector of the circle. For obvious reasons, OAPB is called the *minor sector* and OAQB is called the *major sector*. You can also see that angle of the major sector is $360° - \angle$ AOB.

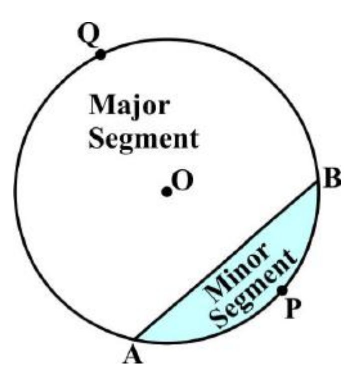


Fig. 11.2

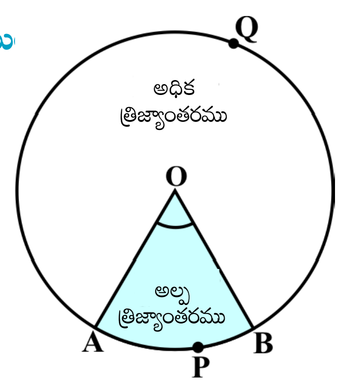
Now, look at Fig. 11.2 in which AB is a chord of the circle with centre O. So, shaded region APB is a segment of the circle. You can also note that unshaded region AQB is another segment of the circle formed by the chord AB. For obvious reasons, APB is called the *minor segment* and AQB is called the *major segment*.

Remark : When we write 'segment' and 'sector' we will mean the 'minor segment' and the 'minor sector' respectively, unless stated otherwise.

1062CH12

వృత్తాలు - సంబంధిత వైశాల్యాలు 11

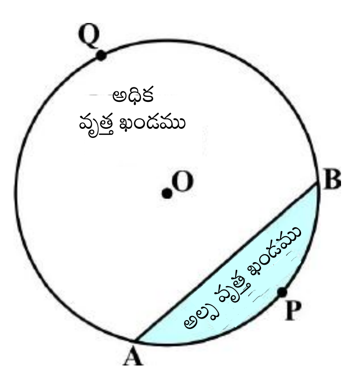
11.1 వృత్త త్రిజ్యాంతరము (సెక్టరు) మరియు వృత్త ఖండముల వైశాల్యము



పటం 11.1

వృత్త త్రిజ్యాంతరము (సెక్టరు) మరియు వృత్త ఖండముల గురించి మీరు ఇది వరకే క్రింది తరగతులలో కొంత వరకు నేర్చుకొని ఉన్నారు. రెండు వ్యాసార్ధములు మరియు సంబంధిత చాపములచే ఆవరింపబడిన వృత్త ప్రదేశము యొక్క భాగాన్ని *వృత్త త్రిజ్యాంతరము (సెక్టరు)* అంటారు. మరియు ఒక వృత్త ప్రదేశములో వృత్త జ్యా మరియు సంబంధిత చాపములచే ఆవరింపబడిన భాగాన్ని *వృత్త ఖండము* అంటారు. పటము 11.1 నందు షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతము OAPB అనేది O కేంద్రముగా గల వృత్తానికి ఒక *త్రిజ్యాంతరము* అవుతుంది.

$\angle$ AOB ని త్రిజ్యాంతర కోణము అంటారు. ఈ పటములో షేడ్ చేయబడని ప్రాంతము OAQB కూడా మరొక వృత్త త్రిజ్యాంతరము అవుతుందని గమనించండి. OAPB ని *అల్ప త్రిజ్యాంతరము* అని, OAQB ని *అధిక త్రిజ్యాంతరము* అని అంటారు. అధిక త్రిజ్యాంతర కోణము $360° - \angle AOB$ అవుతుంది.



పటం 11.2

పటము 11.2 ని పరిశీలించండి. O కేంద్రంగా గల ఒకవృత్తంలో AB ఒక జ్యా. కాబట్టి షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం APB అనేది ఒక వృత్త ఖండం. షేడ్ చేయబడని ప్రాంతం AQB కూడా వృత్తానికి జ్యా ABతో నిర్మితమైన మరొక వృత్త ఖండమని మీరు గమనించగలరు. కాబట్టి APB ని *అల్ప వృత్త ఖండమని*, AQBని *అధిక వృత్త ఖండమని* స్పష్టంగా చెప్పవచ్చు.

సూచన: ప్రత్యేకంగా పేర్కొనబడినప్పుడు తప్ప మిగిలిన అన్ని సందర్భాలలో 'త్రిజ్యాంతరము' అంటే 'అల్ప త్రిజ్యాంతరము' అని, 'వృత్త ఖండం' అంటే 'అల్ప వృత్త ఖండమ'నీ భావించాలి.

Now with this knowledge, let us try to find some relations (or formulae) to calculate their areas.

Let OAPB be a sector of a circle with centre O and radius r (see Fig. 11.3). Let the degree measure of $\angle$ AOB be θ.

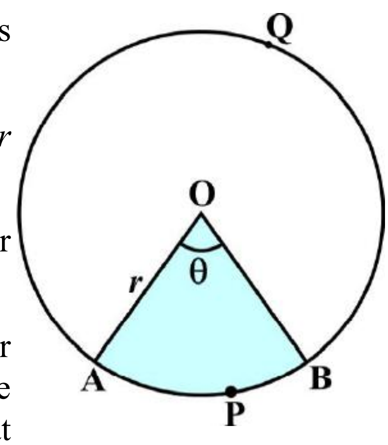


Fig. 11.3

You know that area of a circle (in fact of a circular region or disc) is πr^2.

In a way, we can consider this circular region to be a sector forming an angle of 360° (i.e., of degree measure 360) at the centre O. Now by applying the Unitary Method, we can arrive at the area of the sector OAPB as follows:

When degree measure of the angle at the centre is 360, area of the sector = πr^2

So, when the degree measure of the angle at the centre is 1, area of the sector = $\frac{\pi r^2}{360}$.

Therefore, when the degree measure of the angle at the centre is θ, area of the sector = $\frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$.

Thus, we obtain the following relation (or formula) for area of a sector of a circle:

Area of the sector of angle θ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$,

where r is the radius of the circle and θ the angle of the sector in degrees.

Now, a natural question arises : Can we find the length of the arc APB corresponding to this sector? Yes. Again, by applying the Unitary Method and taking the whole length of the circle (of angle 360°) as $2\pi r$, we can obtain the required length of the arc APB as $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$.

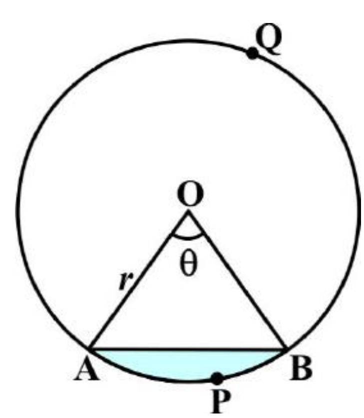
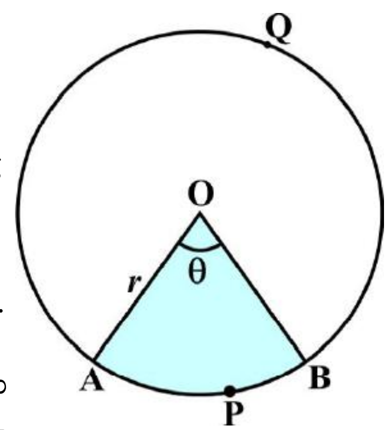


Fig. 11.4

So, **length of an arc of a sector of angle θ = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$.**

ఈ పరిజ్ఞానంతో మనం వాటి వైశాల్యాలు కనుగొనుటకు కొన్ని సూత్రాలను రాబడదాము.

OAPB అనేది O కేంద్రము, r వ్యాసార్థం గల (11.3 పటం చూడండి) ఒక త్రిజ్యాంతరము. $\angle AOB$ కోణం విలువ θ డిగ్రీలు అనుకుందాము.



పటం 11.3

ఒక వృత్త వైశాల్యం (వృత్తాకార ప్రాంతము లేదా డిస్క్) πr^2 అని మనకు తెలుసు.

ఈ వృత్తాకార భాగాన్ని కేంద్రము వద్ద 360° కోణం చేసే ఒక త్రిజ్యాంతరము అనుకుంటే ఏకవస్తు పద్ధతి ప్రకారం OAPB త్రిజ్యాంతర వైశాల్యాన్ని ఈ క్రింది విధముగా కనుగొనవచ్చును.

కేంద్రము వద్ద 360° కోణము చేయుచున్నప్పుడు సెక్టరు వైశాల్యం $= \pi r^2$

కాబట్టి, కేంద్రం వద్ద 1° డిగ్రీ కోణము చేసే సెక్టార్ వైశాల్యం $= \frac{\pi r^2}{360}$.

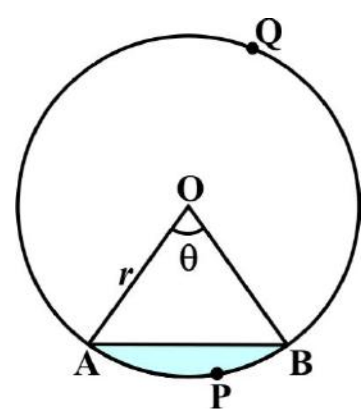
కాబట్టి కేంద్రం వద్ద θ కోణము చేయుచున్నప్పుడు సెక్టరు వైశాల్యం $= \frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$.

ఆ విధంగా మనం సెక్టరు వైశాల్యానికి ఈ క్రింది సంబంధాన్ని (సూత్రాన్ని) పొందవచ్చు:

θ కోణము గల సెక్టరు వైశాల్యం $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$,

ఇచ్చుట r వృత్త వ్యాసార్థం మరియు సెక్టరు కోణం θ డిగ్రీలు.

సహజంగా ఇక్కడ ఒక ప్రశ్న ఉత్పన్నమవుతుంది. ఈ త్రిజ్యాంతరానికి చెందిన వృత్త చాపము APB పొడవు కనుగొనగలమా? అవును. వృత్తము యొక్క మొత్తము పొడవును 360° కోణంతో $2\pi r$ గా తీసుకొని, ఏక వస్తు పద్ధతి ద్వారా మనము APB చాపము పొడవు $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ గా పొందవచ్చు.



పటం 11.4

కాబట్టి, **θ డిగ్రీలు కోణంగా గల త్రిజ్యాంతర చాపము పొడవు** $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$.

Now let us take the case of the area of the segment APB of a circle with centre O and radius r (see Fig. 11.4). You can see that :

Area of the segment APB = Area of the sector OAPB – Area of Δ OAB

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \text{area of } \Delta OAB$$

Note : From Fig. 11.3 and Fig. 11.4 respectively, you can observe that:

Area of the major sector OAQB = πr^2 – Area of the minor sector OAPB

and Area of major segment AQB = πr^2 – Area of the minor segment APB

Let us now take some examples to understand these concepts (or results).

Example 1 : Find the area of the sector of a circle with radius 4 cm and of angle 30°. Also, find the area of the corresponding major sector (Use $\pi = 3.14$).

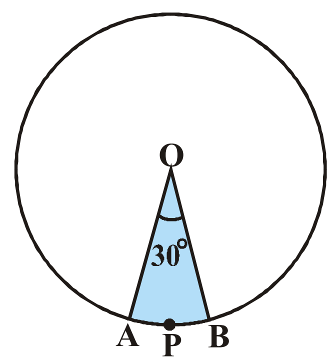


Fig. 11.5

Solution : Given sector is OAPB (see Fig. 11.5).

$$\text{Area of the sector} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{12.56}{3} \text{ cm}^2 = 4.19 \text{cm}^2 \text{ (approx.)}$$

Area of the corresponding major sector

$$= \pi r^2 - \text{area of sector OAPB}$$

$$= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ cm}^2$$

$$= 46.05 \text{ cm}^2 = 46.1 \text{ cm}^2 \text{(approx.)}$$

Alternatively, area of the major sector = $\frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$

$$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16 \text{cm}^2 = 46.05 \text{ cm}^2$$

$$= 46.1 \text{ cm}^2 \text{ (approx.)}$$

ఇప్పుడు O కేంద్రము r వ్యాసార్థముగా గల వృత్తము యొక్క వృత్త ఖండం APB వైశాల్యాన్ని కనుగొందాము. (పటము 11.4) గమనించండి:

APB వృత్త ఖండ వైశాల్యము = OAPB త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం – Δ OAB త్రిభుజ వైశాల్యం

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta \text{ OAB}$$ త్రిభుజ వైశాల్యం

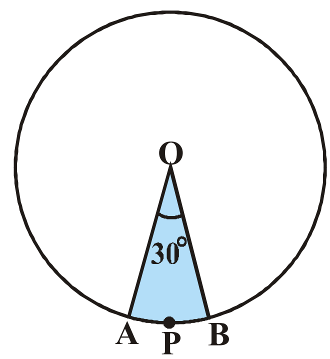
గమనిక: పటము 11.3 మరియు 11.4 లను పరిశీలించినట్లయితే:

OAQB అధిక త్రిజ్యాంతర వైశాల్యము = πr^2 – OAPB అల్ప త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం

మరియు AQB అధిక వృత్త ఖండ వైశాల్యము = πr^2 – APB అల్ప వృత్త ఖండ వైశాల్యం

ఇప్పుడు ఈ భావనలను (ఫలితాలను) అవగాహన చేసుకొనుటకు మనం కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థం, కోణము 30°గా గల వృత్తత్రిజ్యాంతర వైశాల్యమును కనుగొనండి. అదేవిధంగా సంబంధిత అధిక త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం కూడా కనుగొనండి ($\pi = 3.14$ గా తీసుకొనండి).



పటం 11.5

సాధన : ఇచ్చిన త్రిజ్యాంతరము OAPB (పటము 11.5 చూడండి).

త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4$ సెం.మీ.^{2}

$= \frac{12.56}{3}$ సెం.మీ.^{2} $= 4.19$ సెం.మీ.^{2} (సుమారుగా)

సంబంధిత అధిక త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం

= πr^2 – OAPB త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం

$= (3.14 \times 16 - 4.19)$ సెం.మీ.^{2}

$= 46.05 \text{ cm}^2 = 46.1$ సెం.మీ.^{2} (సుమారుగా)

ప్రత్యామ్నాయంగా, అధిక త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం $= \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$

$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16$ సెం.మీ.^{2}

$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16$ సెం.మీ.^{2} $= 46.05$ సెం.మీ.^{2}

$= 46.1$ సెం.మీ.^{2} (సుమారుగా)

Example 2 : Find the area of the segment AYB shown in Fig. 11.6, if radius of the circle is 21 cm and $\angle$ AOB = 120°. (Use $\pi = \frac{22}{7}$)

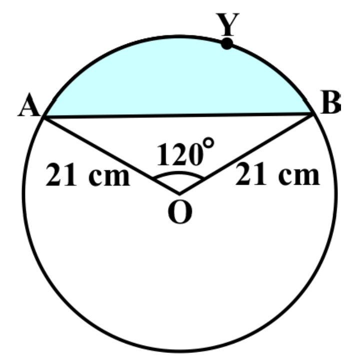


Fig. 11.6

Solution : Area of the segment AYB

$$= \text{Area of sector OAYB} - \text{Area of } \Delta \text{ OAB} \quad (1)$$

Now, area of the sector OAYB $= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 462 \text{ cm}^2$ (2)

For finding the area of Δ OAB, draw OM $\perp$ AB as shown in Fig. 11.7.

Note that OA = OB. Therefore, by RHS congruence, Δ AMO $\cong$ Δ BMO.

So, M is the mid-point of AB and $\angle \text{AOM} = \angle \text{BOM} = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$.

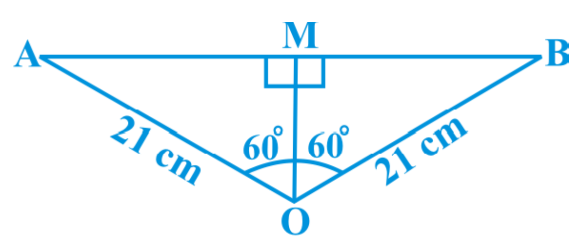


Fig. 11.7

Let $\quad \text{OM} = x \text{ cm}$

So, from Δ OMA, $\quad \frac{\text{OM}}{\text{OA}} = \cos 60°$

or, $\quad \frac{x}{21} = \frac{1}{2} \quad \left(\cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

or, $\quad x = \frac{21}{2}$

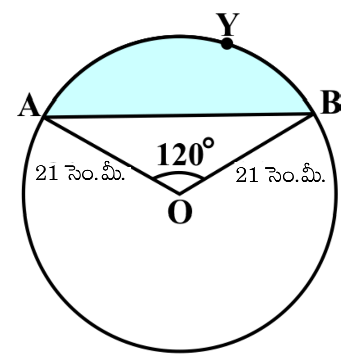
So, $\quad \text{OM} = \frac{21}{2} \text{ cm}$

Also, $\quad \frac{\text{AM}}{\text{OA}} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

So, $\quad \text{AM} = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

Therefore, $\quad \text{AB} = 2 \text{ AM} = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 21\sqrt{3} \text{ cm}$

ఉదాహరణ 2 : వ్యాసార్థం 21 సెం. మీ. మరియు $\angle AOB = 120°$ అయిన, పటము 11.6 లో చూపబడిన వృత్త ఖండం AYB వైశాల్యం కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి)



పటం 11.6

సాధన : వృత్త ఖండం AYB వైశాల్యం

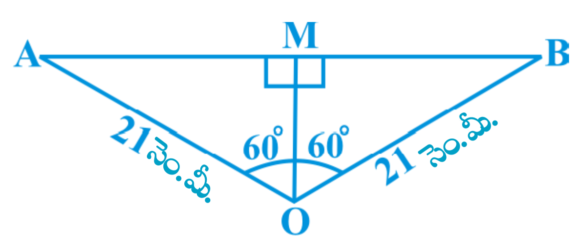
$$= \text{OAYB త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం} - \Delta\, OAB \text{ వైశాల్యం} \quad (1)$$

ఇప్పుడు, OAYB త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం $= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ సెం.మీ^{2} $= 462$ సెం.మీ^{2} (2)

$\Delta\, OAB$ వైశాల్యం కనుగొనుటకు, పటము 11. 7. లో చూపిన విధంగా $OM \perp AB$ గీయండి.

$OA = OB$ అని గమనించండి. కాబట్టి లం.క.భు నియమం ప్రకారం, $\Delta\, AMO \cong \Delta\, BMO$.

కనుక, AB మధ్య బిందువు M మరియు $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$.



పటం 11.7

$OM = x$ సెం.మీ. అనుకొనుము

కావున, $\Delta\, OMA$ నుండి, $\frac{OM}{OA} = \cos 60°$

లేదా, $\frac{x}{21} = \frac{1}{2} \quad \left(\cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

లేదా, $x = \frac{21}{2}$

కాబట్టి, $OM = \frac{21}{2}$ సెం.మీ.

కనుక, $\frac{AM}{OA} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

కాబట్టి, $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ సెం.మీ.

కాబట్టి, $AB = 2\,AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ సెం.మీ. $= 21\sqrt{3}$ సెం.మీ.

So, area of Δ OAB $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ OM $= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ cm^2

$$= \frac{441}{4}\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \qquad (3)$$

Therefore, area of the segment AYB $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ cm^2 [From (1), (2) and (3)]

$$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})\,\text{cm}^2$$

EXERCISE 11.1

Unless stated otherwise, use $\pi = \frac{22}{7}$.

1. Find the area of a sector of a circle with radius 6 cm if angle of the sector is 60°.
2. Find the area of a quadrant of a circle whose circumference is 22 cm.
3. The length of the minute hand of a clock is 14 cm. Find the area swept by the minute hand in 5 minutes.
4. A chord of a circle of radius 10 cm subtends a right angle at the centre. Find the area of the corresponding : (i) minor segment (ii) major sector. (Use π = 3.14)
5. In a circle of radius 21 cm, an arc subtends an angle of 60° at the centre. Find:

   (i) the length of the arc (ii) area of the sector formed by the arc

   (iii) area of the segment formed by the corresponding chord
6. A chord of a circle of radius 15 cm subtends an angle of 60° at the centre. Find the areas of the corresponding minor and major segments of the circle.

   (Use π = 3.14 and $\sqrt{3}$ = 1.73)
7. A chord of a circle of radius 12 cm subtends an angle of 120° at the centre. Find the area of the corresponding segment of the circle.

   (Use π = 3.14 and $\sqrt{3}$ = 1.73)

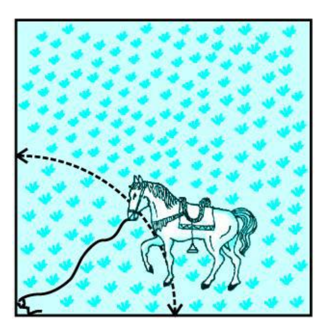


Fig. 11.8

8. A horse is tied to a peg at one corner of a square shaped grass field of side 15 m by means of a 5 m long rope (see Fig. 11.8). Find

కాబట్టి, Δ OAB వైశాల్యము $= \frac{1}{2}$ AB × OM $= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ సెం.మీ.^{2}

$$= \frac{441}{4}\sqrt{3}\,cm^2 \qquad (3)$$

కాబట్టి, వృత్త ఖండం AYB వైశాల్యం $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ సెం.మీ.^{2} [(1), (2) మరియు (3) ల నుండి]

$$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})\text{ సెం.మీ.}^2$$

అభ్యాసం 11.1

ప్రత్యేకంగా పేర్కొనబడినప్పుడు తప్ప, అన్ని సందర్భాలలో $\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనండి.

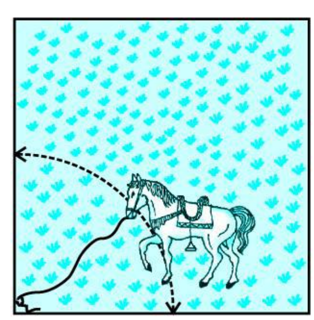
1. వ్యాసార్ధం 6 సెం. మీ., సెక్టరు కోణం 60° గా గల త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం కనుగొనండి.
2. పరిధి 22 సెం. మీ. గాగల వృత్త చతుర్ధ భాగ వైశాల్యం కనుగొనండి.
3. ఒక గడియారంలో నిమిషాల ముల్లు పొడవు 14 సెం.మీ అయిన 5 నిమిషాలలో నిమిషాల ముల్లు ఆవరించే (ప్రయాణించే) ప్రదేశ వైశాల్యం కనుగొనండి.
4. 10 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తము యొక్క ఒక జ్యా కేంద్రం వద్ద లంబకోణము చేయుచున్నది. అయిన సంబంధిత (i) అల్ప వృత్త ఖండము (ii) అధిక వృత్త ఖండం వైశాల్యాలు కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసికొనండి)
5. 21 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తంలో ఒక చాపము కేంద్రం వద్ద 60° కోణము చేయుచున్నది. అయిన:

   (i) చాపము పొడవు (ii) చాపముచే ఏర్పడే త్రిజ్యాంతర వైశాల్యం

   (iii) సంబంధిత 'జ్యా' చే ఏర్పడే వృత్తఖండ వైశాల్యమును కనుగొనండి.
6. 15 సెం.మీ వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తము యొక్క ఒక 'జ్యా' కేంద్రం వద్ద 60° కోణము చేయుచున్నది. అయిన సంబంధిత అధిక వృత్త ఖండం మరియు అల్ప వృత్త ఖండము వైశాల్యాలను కనుగొనండి.

   ($\pi = 3.14$ మరియు $\sqrt{3} = 1.73$గా తీసుకొండి)
7. 12 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తం యొక్క ఒక 'జ్యా' కేంద్రం వద్ద 120° కోణము చేయుచున్నది. అయిన సంబంధిత 'జ్యా' ఏర్పరిచే వృత్త ఖండ వైశాల్యము కనుగొనుము.

   ($\pi = 3.14$ మరియు $\sqrt{3} = 1.73$గా తీసుకొండి)
8. 15 మీ. భుజముగా గల చతురస్రాకార గడ్డి మైదానం ఒక మూలలో 5 మీ. పొడవైన త్రాడుతో ఒక గుర్రము ఒక గుంజకు కట్టబడి ఉన్నది. అయిన (పటము 11.8 చూడండి)



పటం 11.8

(i) the area of that part of the field in which the horse can graze.

(ii) the increase in the grazing area if the rope were 10 m long instead of 5 m. (Use $\pi = 3.14$)

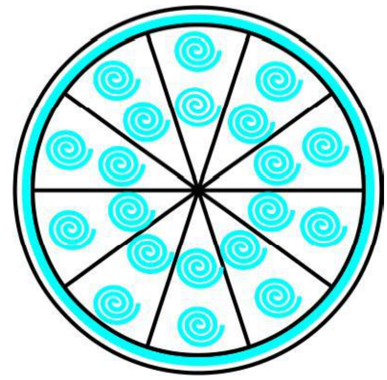


Fig. 11.9

9. A brooch is made with silver wire in the form of a circle with diameter 35 mm. The wire is also used in making 5 diameters which divide the circle into 10 equal sectors as shown in Fig. 11.9. Find :

(i) the total length of the silver wire required.

(ii) the area of each sector of the brooch.

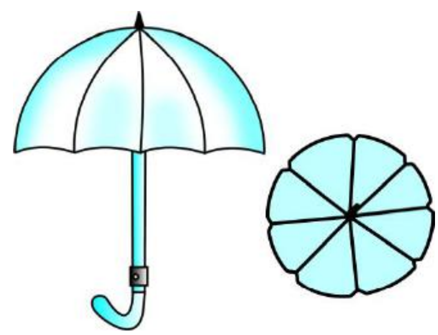


Fig. 11.10

10. An umbrella has 8 ribs which are equally spaced (see Fig. 11.10). Assuming umbrella to be a flat circle of radius 45 cm, find the area between the two consecutive ribs of the umbrella.

11. A car has two wipers which do not overlap. Each wiper has a blade of length 25 cm sweeping through an angle of 115°. Find the total area cleaned at each sweep of the blades.

12. To warn ships for underwater rocks, a lighthouse spreads a red coloured light over a sector of angle 80° to a distance of 16.5 km. Find the area of the sea over which the ships are warned. (Use $\pi = 3.14$)

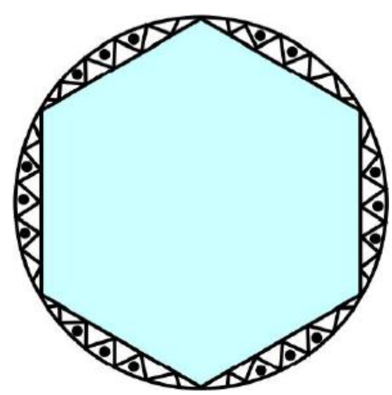


Fig. 11.11

13. A round table cover has six equal designs as shown in Fig. 11.11. If the radius of the cover is 28 cm, find the cost of making the designs at the rate of ₹ 0.35 per cm^2. (Use $\sqrt{3} = 1.7$)

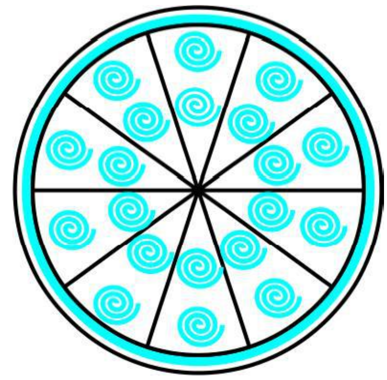
14. Tick the correct answer in the following :

Area of a sector of angle p (in degrees) of a circle with radius R is

(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

(i) గుర్రము గడ్డిమేయుటకు అవకాశం గల ప్రాంత వైశాల్యం కనుగొనండి.

(ii) 5మీ. బదులు 10మీ. పొడవైన తాడుతో గుర్రాన్ని కట్టివేసిన అది గడ్డిమేయగల ప్రాంత వైశాల్యంలో వచ్చే పెరుగుదలను కనుగొనండి ($\pi = 3.14$గా తీసుకోండి)



పటం 11.9

9. 35 మి.మీ. వ్యాసార్ధం గల పతకము (brooch) వెండి తీగతో తయారు చేయబడింది. మరియు ఆ పతకాన్ని 10 సమాన త్రిజ్యాంతరాలుగా విభజించే 5 వ్యాసపు తీగలకు కూడా అదే తీగను వాడారు (పటం 11.9 చూడండి) అయిన :

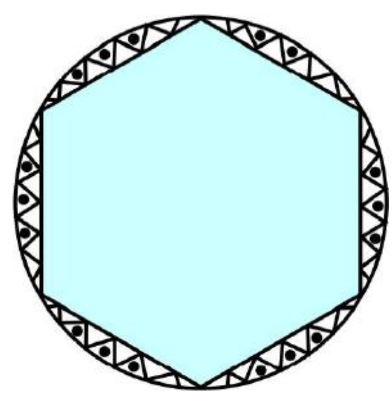
(i) కావలసిన వెండి తీగ మొత్తం పొడవును.

(ii) పతకము యొక్క ప్రతి త్రిజ్యాంతర వైశాల్యమును కనుగొనండి.

పటం 11.10

10. ఒక గొడుగు నందు 8 తీగలు సమాన దూరంలో అమర్చబడి ఉన్నవి (పటం 11. 10చూడండి). గొడుగును 45 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల ఒక సమతల వృత్తంగా భావిస్తే గొడుగు యొక్క రెండు వరుస తీగల మధ్య వైశాల్యం ఎంత?

11. ఒక కారు అద్దంపై ఒకదానిపై ఒకటి అధ్యారోహణం కాని (overlap) రెండు వైపర్లు ఉన్నవి. 25 సెం.మీ. పొడవు గల ప్రతి వైపరు 115° కోణంతో తుడవగలదు. రెండు వైపర్లు ఒకసారి పని చేసిన, అవి శుభ్రపరిచే ప్రదేశ వైశాల్యం కనుగొనుము.



పటం 11.11

12. సముద్ర అంతర్భాగములో గల రాళ్లను గురించి నౌకలకు హెచ్చరిక జారీ చేయుటకు, 80° త్రిజ్యాంతర కోణంతో 16.5 కి.మీ. పొడవైన ఎరుపు రంగు కాంతి పుంజాన్ని ఒక దీప స్తంభము (light house) వెలువరిస్తుంది. ఈ కాంతి సముద్ర ఉపరితలంపై ఎంత వైశాల్యం గల ప్రాంతాన్ని ఆక్రమిస్తుందని హెచ్చరింపగలదు. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి)

13. ఒక గుండ్రని టేబుల్ కవరు పటం 11.11 లో చూపిన విధంగా ఆరు సమాన డిజైన్లను కలిగియున్నది. టేబుల్ కవర్ వ్యాసార్ధం 28 సెం.మీ. అయిన, చ.సెం.మీ.కు ₹ 0.35 వంతున ఆ డిజైన్లు తయారు చేయుటకు ఎంత ఖర్చు అగును ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి)

14. క్రింది వానిలో సరియైన సమాధానాన్ని టిక్ చేయండి:

p డిగ్రీలకోణం R వ్యాసార్ధం కలిగిన వృత్త త్రిజ్యాంతర (సెక్టార్) వైశాల్యం

(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

11.2 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. Length of an arc of a sector of a circle with radius r and angle with degree measure θ is $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$.

2. Area of a sector of a circle with radius r and angle with degree measure θ is $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$.

3. Area of segment of a circle

= Area of the corresponding sector – Area of the corresponding triangle.

11.2 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈ క్రింది విషయాలు నేర్చుకున్నారు :

1. r వ్యాసార్థము, θ డిగ్రీలు కోణంగా కలిగిన వృత్త త్రిజ్యాంతర చాపం యొక్క పొడవు $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$.

2. r వ్యాసార్థము, θ డిగ్రీలు కోణంగా కలిగిన వృత్త త్రిజ్యాంతరం యొక్క వైశాల్యం $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$.

3. వృత్త ఖండ వైశాల్యము

= సంబంధిత వృత్త త్రిజ్యాంతరం వైశాల్యం – సంబంధిత త్రిభుజ వైశాల్యం.

1062CH13

SURFACE AREAS AND VOLUMES 12

12.1 Introduction

From Class IX, you are familiar with some of the solids like cuboid, cone, cylinder, and sphere (see Fig. 12.1). You have also learnt how to find their surface areas and volumes.

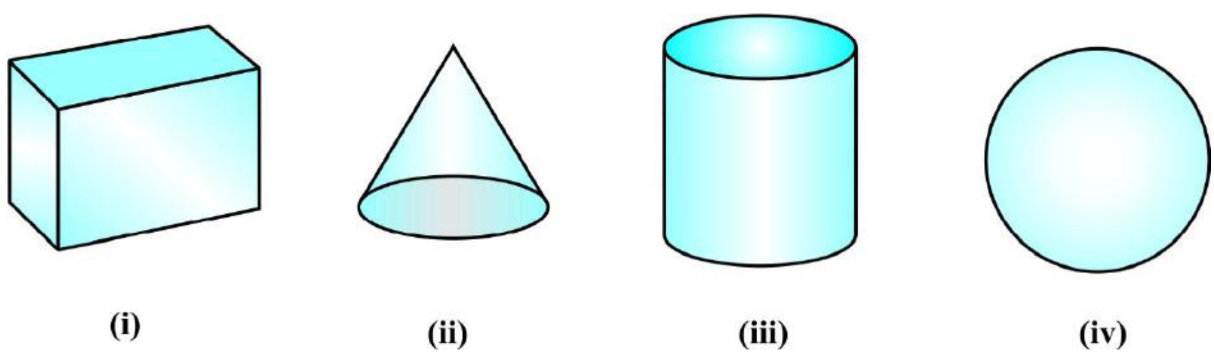


Fig. 12.1

In our day-to-day life, we come across a number of solids made up of combinations of two or more of the basic solids as shown above.

You must have seen a truck with a container fitted on its back (see Fig. 12.2), carrying oil or water from one place to another. Is it in the shape of any of the four basic solids mentioned above? You may guess that it is made of a cylinder with two hemispheres as its ends.

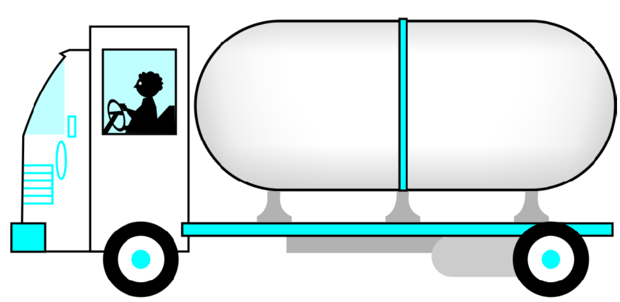


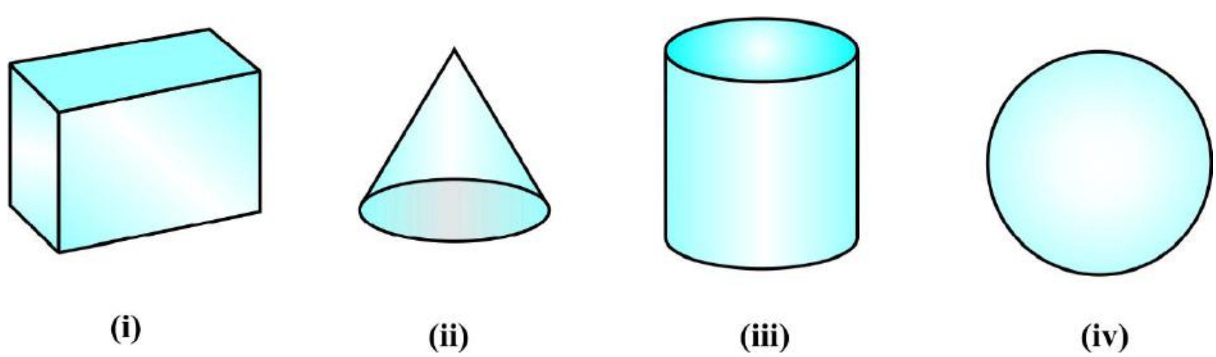
Fig. 12.2

1062CH13

ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు 12

12.1 పరిచయం

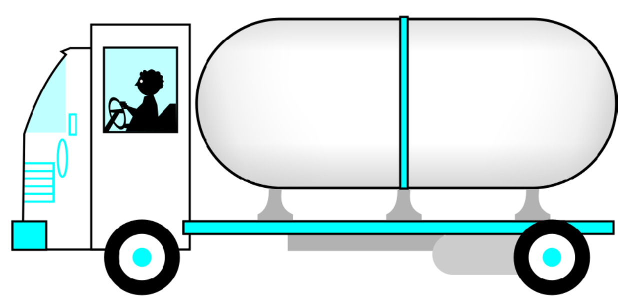
IXవ తరగతిలో దీర్ఘఘనము,శంకువు, స్థూపం, గోళం వంటి కొన్ని ఘనాకృతుల గురించి తెలుసుకున్నారు (పటం 12.1 చూడండి). వాటి ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలను ఎలా కనుగొనాలో కూడా నేర్చుకున్నారు.



పటం 12.1

రోజూ వారి జీవితంలో, మనం రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ పైన చూపించబడిన ప్రాథమిక ఘనాకృతుల కలయికతో ఉన్న వస్తువులను చూస్తూంటాము కదా!

వెనుక భాగంలో కంటైనర్ అమర్చబడి, (పటం 12.2 చూడండి) ఒక ప్రదేశం నుండి మరొక ప్రదేశానికి చమురు లేదా నీటిని తీసుకువెళ్ళే ట్రక్కును మీరు చూసే ఉంటారు. ఇది పైన పేర్కొన్న నాలుగు ప్రాథమిక ఘనాకృతులలో ఏదయినా ఆకారంలో ఉందా? ఇది రెండు అర్ధగోళాలను చివరలుగా కలిగి ఉన్న స్థూపాకారంలో తయారు చేయబడిందని మీరు ఊహించవచ్చు.



పటం 12.2

Again, you may have seen an object like the one in Fig. 12.3. Can you name it? A test tube, right! You would have used one in your science laboratory. This tube is also a combination of a cylinder and a hemisphere. Similarly, while travelling, you may have seen some big and beautiful buildings or monuments made up of a combination of solids mentioned above.

If for some reason you wanted to find the surface areas, or volumes, or capacities of such objects, how would you do it? We cannot classify these under any of the solids you have already studied.

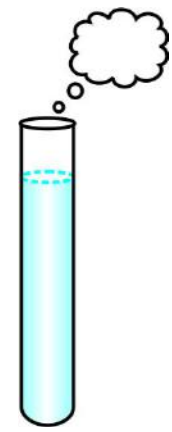


Fig. 12.3

In this chapter, you will see how to find surface areas and volumes of such objects.

12.2 Surface Area of a Combination of Solids

Let us consider the container seen in Fig. 12.2. How do we find the surface area of such a solid? Now, whenever we come across a new problem, we first try to see, if we can break it down into smaller problems, we have earlier solved. We can see that this solid is made up of a cylinder with two hemispheres stuck at either end. It would look like what we have in Fig. 12.4, after we put the pieces all together.

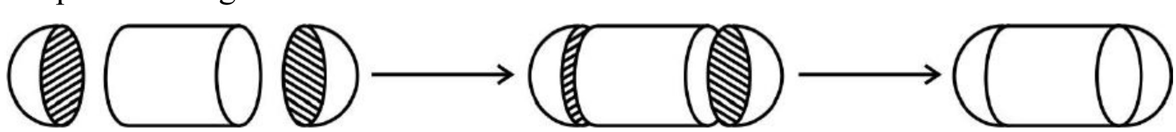


Fig. 12.4

If we consider the surface of the newly formed object, we would be able to see only the curved surfaces of the two hemispheres and the curved surface of the cylinder.

So, the *total* surface area of the new solid is the sum of the *curved* surface areas of each of the individual parts. This gives,

TSA of new solid = CSA of one hemisphere + CSA of cylinder

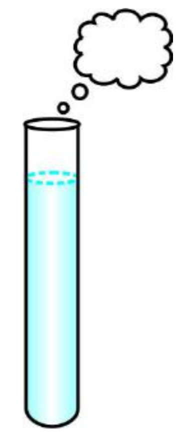
+ CSA of other hemisphere

where TSA, CSA stand for 'Total Surface Area' and 'Curved Surface Area' respectively.

Let us now consider another situation. Suppose we are making a toy by putting together a hemisphere and a cone. Let us see the steps that we would be going through.

అలాగే, మీరు పటం12.3. లో ఉన్న వస్తువును చూసే ఉంటారు. మీరు దాని పేరు చెప్పగలరా? పరీక్ష నాళిక కదా! మీరు విజ్ఞానశాస్త్ర ప్రయోగశాలలో దీనిని ఉపయోగించి ఉంటారు. ఈ పరీక్ష నాళిక కూడా ఒక స్థూపం మరియు అర్ధగోళం యొక్క కలయిక. అదేవిధంగా, మీరు ప్రయాణాలు చేసేటప్పుడు, పైన పేర్కొన్న ఘనాకృతుల కలయికతో తయారైన కొన్ని పెద్ద, అందమైన భవనాలు లేదా స్మారక చిహ్నాలను కూడా చూసే ఉంటారు.

ఒకవేళ మీరు అటువంటి వస్తువుల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యాలు, లేదా ఘనపరిమాణాలు లేదా సామర్థ్యాలు (capacity) తెలుసుకోవాలంటే, మీరు వాటిని ఎలా కనుగొంటారు? మీరు ఇంతవరకు తెలుసుకున్న ఘనాకృతుల క్రింద వీటిని వర్గీకరించలేరు.

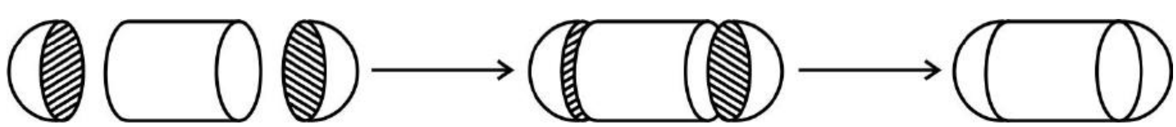


పటం 12.3

ఈ అధ్యాయంలో, అటువంటి వస్తువుల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలను ఎలా కనుగొనాలో మీరు తెలుసుకుంటారు.

12.2 ఘనాకార వస్తువుల సముదాయ ఉపరితల వైశాల్యము

పటం12.2. లో కనిపించే కంటైనర్‌ను పరిశీలిద్దాం. అటువంటి ఘనాకృతుల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యాన్ని మనం ఎలా కనుగొనవచ్చు? మనకు ఏదైనా కొత్త సమస్య వచ్చినపుడు, మనం మొదట దానిని ఇంతకు ముందు సాధించిన చిన్న చిన్న సమస్యలుగా విడగొట్టగలమా అని ఆలోచిస్తాము. ఈ ఘనాకృతి ఒక స్థూపానికి ఇరువైపులా అంటించిన రెండు అర్ధగోళాలతో ఏర్పడినది. ఈ విడివిడి భాగాలను కలిపినపుడు, పటం 12.4 లో ఉన్నట్లుగా కనిపిస్తుంది.



పటం 12.4

కొత్తగా ఏర్పడిన వస్తువు యొక్క ఉపరితలాన్ని గమనిస్తే, మనకు, రెండు అర్ధగోళాల వక్రతల వైశాల్యాలు, స్తూపం యొక్క వక్రతల వైశాల్యం మాత్రమే చూడగలం.

కాబట్టి, కొత్త ఘనాకృతి యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం, ఆయా విడివిడి భాగాల వక్రతల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం. అనగా,

కొత్త ఘనాకృతి యొక్క సం.త. వై = ఒక అర్ధ గోళం యొక్క వ.త.వై + స్థూపం యొక్క వ.త.వై

+ మరొక అర్ధ గోళం యొక్క వ.త.వై

ఇక్కడ, సం.త .వై, వ.త.వై లు వరుసగా సంపూర్ణతల వైశాల్యం, వక్రతల వైశాల్యాలను సూచిస్తాయి.

ఇప్పుడు మనం మరొక సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం. ఒక అర్ధగోళం, ఒక శంకువులను కలిపి ఒక బొమ్మను తయారు చేస్తున్నామనుకోండి. మనం ఏమేమి సోపానాలు చేయాలో చూద్దాం.

First, we would take a cone and a hemisphere and bring their flat faces together. Here, of course, we would take the base radius of the cone equal to the radius of the hemisphere, for the toy is to have a smooth surface. So, the steps would be as shown in Fig. 12.5.

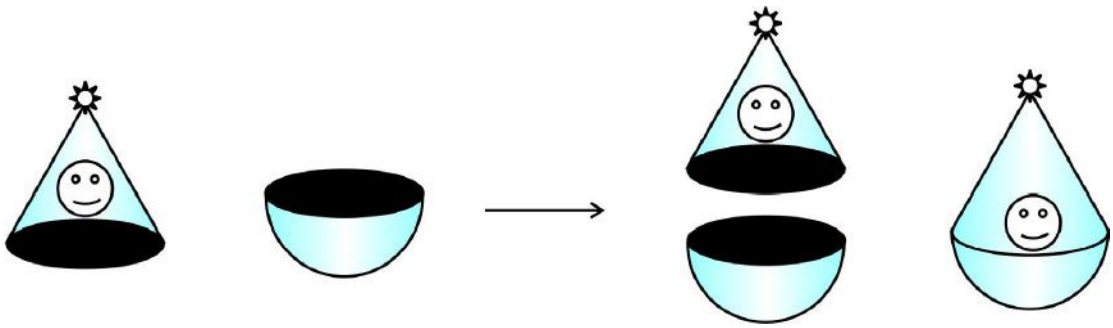


Fig. 12.5

At the end of our trial, we have got ourselves a nice round-bottomed toy. Now if we want to find how much paint we would require to colour the surface of this toy, what would we need to know? We would need to know the surface area of the toy, which consists of the CSA of the hemisphere and the CSA of the cone.

So, we can say:

Total surface area of the toy = CSA of hemisphere + CSA of cone

Now, let us consider some examples.

Example 1 : Rasheed got a playing top (*lattu*) as his birthday present, which surprisingly had no colour on it. He wanted to colour it with his crayons. The top is shaped like a cone surmounted by a hemisphere (see Fig 12.6). The entire top is 5 cm in height and the diameter of the top is 3.5 cm. Find the area he has to colour.

(Take $\pi = \frac{22}{7}$)

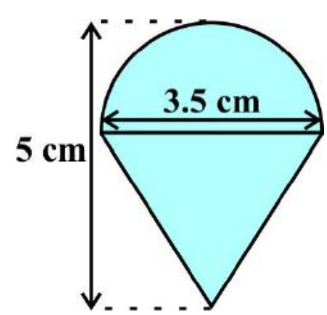


Fig. 12.6

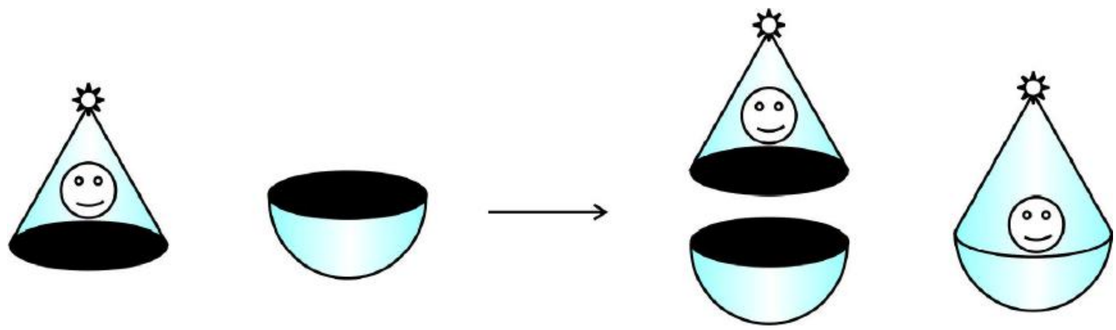
Solution : This top is exactly like the object we have discussed in Fig. 12.5. So, we can conveniently use the result we have arrived at there. That is :

TSA of the toy = CSA of hemisphere + CSA of cone

Now, the curved surface area of the hemisphere = $\frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2$$

మొదటగా, శంకువు, అర్ధ గోళాల సమతల ముఖాలను ఒకటిగా చేర్చుతాము. బొమ్మ ఉపరితలం ఒకేలా ఉండడం కోసం శంకువు భూ వ్యాసార్ధం, అర్ధ గోళాల వ్యాసార్ధాలు సమానంగా ఉండేలా తీసుకుంటాము. కాబట్టి, ఆ దశలు పటం 12.5లో చూపిన విధంగా ఉంటాయి.



పటం 12.5

చివరగా గుండ్రముగావున్న అడుగు భాగము కల్గిన ఆటబొమ్మ తయారవుతుంది. ఇప్పుడు ఈ బొమ్మ యొక్క ఉపరితలంపై రంగు వేయడానికి ఎంత రంగు అవసరమో కనుగొనాలనుకుంటే, మనం ఏమి తెలుసుకోవాలి? మనం బొమ్మ యొక్క ఉపరితల వైశాల్యాన్ని తెలుసుకోవాలి. అనగా అర్ధ గోళం, శంకువుల వ.త.వై.లను తెలుసుకోవాలి.

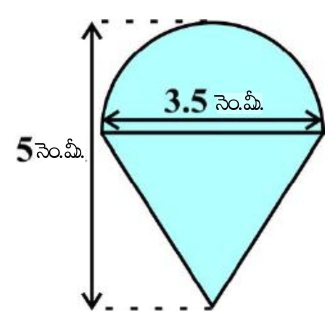
కాబట్టి,

బొమ్మ యొక్క సం.త. వై. = అర్ధగోళం యొక్క వ.త.వై. + శంకువు యొక్క వ.త.వై.

ఇప్పుడు, కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : రషీద్ ఒక బొంగరాన్ని తన పుట్టినరోజు బహుమతిగా పొందాడు, ఆశ్చర్యం ఏమంటే దానిపై ఏ రంగు వేసి లేదు. అతను తన క్రేయాన్స్‌తో రంగు వేయాలనుకున్నాడు. ఆ బొంగరం, పైభాగం అర్ధగోళంతో కప్పబడి, శంకువు ఆకారంలో ఉంది. (పటం 2.6 చూడండి). అది 5 సెం.మీ. ఎత్తు, 3.5 సెం.మీ. వ్యాసం కలిగి ఉంది. అతను రంగు వేయవలసిన భాగం ఎంతో కనుగొనండి.

($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి)



పటం 12.6

సాధన : ఈ బొంగరం ఖచ్చితంగా, పటం 12.5. లో మనం చర్చించిన వస్తువు వలె ఉంది. కాబట్టి, మనం అక్కడ కనుగొన్న సూత్రాన్ని ఇక్కడ చక్కగా ఉపయోగించుకోవచ్చు :

బొంగరం యొక్క సం.త. వై = అర్ధగోళం యొక్క వ.త.వై + శంకువు యొక్క వ.త.వై

ఇప్పుడు, అర్ధగోళ వక్రతల వైశాల్యం $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ సెం.మీ.}^2$$

Also, the height of the cone = height of the top – height (radius) of the hemispherical part

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{cm} = 3.25 \text{ cm}$$

So, the slant height of the cone (l) = $\sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}$ cm = 3.7 cm (approx.)

Therefore, CSA of cone = $\pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{cm}^2$

This gives the surface area of the top as

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = 39.6 \text{ cm}^2 \text{ (approx.)}$$

You may note that 'total surface area of the top' is *not* the sum of the total surface areas of the cone and hemisphere.

Example 2 : The decorative block shown in Fig. 12.7 is made of two solids — a cube and a hemisphere. The base of the block is a cube with edge 5 cm, and the hemisphere fixed on the top has a diameter of 4.2 cm. Find the total surface area of the block. (Take $\pi = \frac{22}{7}$)

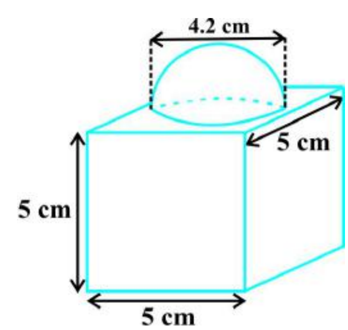


Fig. 12.7

Solution : The total surface area of the cube = 6 × (edge)^2 = 6 × 5 × 5 cm^2 = 150 cm^2.

Note that the part of the cube where the hemisphere is attached is not included in the surface area.

So, the surface area of the block = TSA of cube – base area of hemisphere + CSA of hemisphere

$$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 = (150 + \pi r^2) \text{ cm}^2$$

$$= 150 \text{ cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right) \text{cm}^2$$

$$= (150 + 13.86) \text{ cm}^2 = 163.86 \text{ cm}^2$$

అలాగే, శంకువు ఎత్తు = బొంగరం ఎత్తు – అర్ధగోళాకార భాగం ఎత్తు (వ్యాసార్థం)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{ సెం.మీ.} = 3.25 \text{ సెం.మీ.}$$

కాబట్టి, శంకువు ఏటవాలు ఎత్తు $(l) = \sqrt{r^2 \quad h^2} \quad \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \quad (3.25)^2}$ సెం.మీ. $= 3.7$ సెం.మీ. (సుమారుగా.)

కాబట్టి, శంకువు యొక్క వ.త.వై $= \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)$ సెం.మీ.^{2}

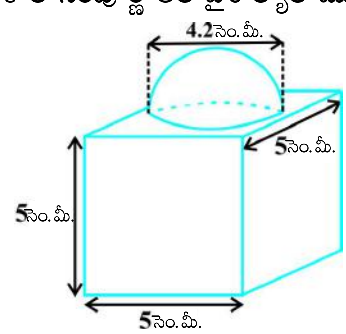
బొంగరం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{సెం.మీ.}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{సెం.మీ.}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \quad 3.5 \quad 3.7 \text{ సెం.మీ.}^2 = \frac{11}{2} \times (3.5 \quad 3.7) \text{ సెం.మీ.}^2 \quad 39.6 \text{ సెం.మీ.}^2 \text{ (సుమారుగా)}$$

ఇక్కడ 'బొంగరం యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యం' శంకువు మరియు అర్ధగోళాల సంపూర్ణ తల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం కాదని మీరు గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ 2 : సమ ఘనం, అర్ధగోళం అనే రెండు ఘనాకృతులతో పటం 12.7 లో చూపించబడిన అలంకరణ వస్తువు తయారు చేయబడింది. ఆ వస్తువు యొక్క భూమి 5 సెం.మీ. భుజం గల ఒక సమఘనం. దానిపై 4.2 సెం. మీ. వ్యాసం గల ఒక అర్ధ గోళంను అతికించబడినది. ఆ వస్తువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి)



పటం 12.7

సాధన : సమ ఘనం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 6 \times$ (భుజం)$^2 = 6 \times 5 \times 5$ సెం.మీ.$^2 = 150$ సెం.మీ.^{2}.

అయితే ఇక్కడ సమఘనం పైభాగంలో అతికించబడిన అర్ధగోళం భాగం వరకు ఉపరితలవైశాల్యంలో కలుపబడలేదని గమనించాలి.

కాబట్టి, ఆ వస్తువు యొక్క ఉపరితలవైశాల్యం = సమఘనం యొక్క సం.త.వై – అర్ధ గోళం యొక్క భూ వైశాల్యం + అర్ధ గోళం యొక్క వ. త. వై

$$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 = (150 + \pi r^2) \text{ సెం.మీ.}^2$$

$$= 150 \text{ సెం.మీ.}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right) \text{సెం.మీ.}^2$$

$$= (150 + 13.86) \text{ సెం.మీ.}^2 = 163.86 \text{ సెం.మీ.}^2$$

Example 3 : A wooden toy rocket is in the shape of a cone mounted on a cylinder, as shown in Fig. 12.8. The height of the entire rocket is 26 cm, while the height of the conical part is 6 cm. The base of the conical portion has a diameter of 5 cm, while the base diameter of the cylindrical portion is 3 cm. If the conical portion is to be painted orange and the cylindrical portion yellow, find the area of the rocket painted with each of these colours. (Take $\pi = 3.14$)

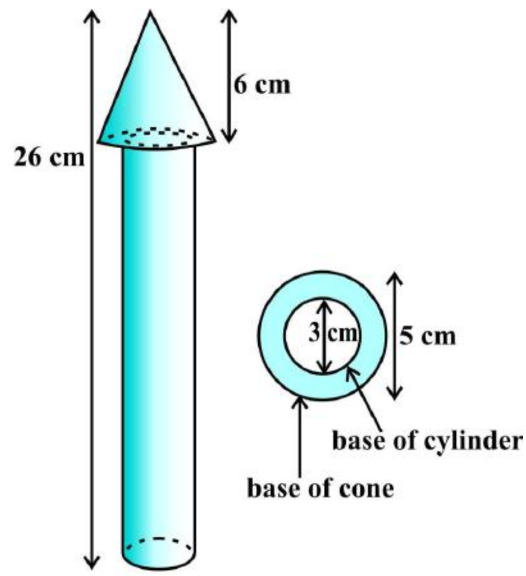


Fig. 12.8

Solution : Denote radius of cone by r, slant height of cone by l, height of cone by h, radius of cylinder by r' and height of cylinder by h'. Then $r = 2.5$ cm, $h = 6$ cm, $r' = 1.5$ cm, $h' = 26 - 6 = 20$ cm and

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} \text{ cm} = 6.5 \text{ cm}$$

Here, the conical portion has its circular base resting on the base of the cylinder, but the base of the cone is larger than the base of the cylinder. So, a part of the base of the cone (a ring) is to be painted.

So, the area to be painted orange = CSA of the cone + base area of the cone – base area of the cylinder

$$= \pi rl + \pi r^2 - \pi (r')^2$$

$$= \pi[(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2] \text{ cm}^2$$

$$= \pi[20.25] \text{ cm}^2 = 3.14 \times 20.25 \text{ cm}^2$$

$$= 63.585 \text{ cm}^2$$

Now, the area to be painted yellow = CSA of the cylinder + area of one base of the cylinder

$$= 2\pi r'h' + \pi (r')^2$$

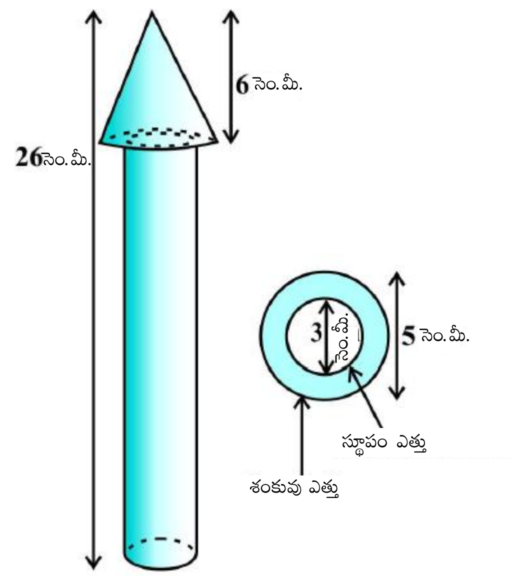
$$= \pi r' (2h' + r')$$

$$= (3.14 \times 1.5)(2 \times 20 + 1.5) \text{ cm}^2$$

$$= 4.71 \times 41.5 \text{ cm}^2$$

$$= 195.465 \text{ cm}^2$$

ఉదాహరణ 3 : పటం12.8 లో చూపించినట్లు, ఒక కొయ్యతో చేయబడిన రాకెట్ బొమ్మ స్థూపంపై శంకువు అమర్చినట్లు ఉంది. ఆ రాకెట్ మొత్తం ఎత్తు 26 సెం. మీ., శంకువు భాగం ఎత్తు 6 సెం.మీ. శంకువు భాగం యొక్క భూ వ్యాసం 5 సెం.మీ. మరియు స్థూపాకార భాగం భూవ్యాసం 3సెం.మీ. శంకువు భాగానికి నారింజ రంగు, స్థూపాకార భాగానికి పసుపు రంగు వేయాలి. రాకెట్ కు వేయవలసిన ఒక్కొక్క రంగు వైశాల్యం కనుగొనండి.
($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి)



పటం 12.8

సాధన : శంకువు యొక్క వ్యాసార్ధాన్ని r తో, ఏటవాలు ఎత్తును l తో, ఎత్తుని h తో సూచిద్దాం. స్థూపం యొక్క వ్యాసార్ధాన్ని r'తో, ఎత్తుని h' తో సూచిద్దాం. అప్పుడు $r = 2.5$సెం.మీ., $h = 6$సెం.మీ., $r' = 1.5$సెం.మీ., $h' = 26 - 6 = 20$ సెం.మీ. మరియు

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 \quad 6^2} \text{ సెం.మీ} = 6.5 \text{ సెం.మీ.}$$

ఇక్కడ శంకువు వృత్తాకార భూమి, స్థూపం భూమిపై నిలబడి ఉంది కానీ, శంకువు భూభాగం స్థూపం భూభాగం కన్నా ఎక్కువ. కాబట్టి, శంకువు భూభాగం లో కొంత భాగం (కంకణాకారం) మాత్రమే రంగు వేయాలి.

కాబట్టి, నారింజ రంగు వేయవలసిన భాగం వైశాల్యం = శంకువు వ.త.వై + శంకువు భూ వైశాల్యం

– స్థూపం భూ వైశాల్యం

$= \pi rl + \pi r^2 - \pi(r')^2$

$= \pi[(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]$ సెం.మీ^{2}.

$= \pi[20.25]$ సెం.మీ^{2} $= 3.14 \times 20.25$ సెం.మీ^{2}.

$= 63.585$ సెం.మీ^{2}.

ఇప్పుడు, పసుపు రంగు వేయవలసిన భాగం వైశాల్యం = స్థూపం వ.త.వై.

+ స్థూపం ఒక భూమి వైశాల్యం

$= 2\pi r'h' + \pi(r')^2$

$= \pi r' (2h' + r')$

$= (3.14 \times 1.5)(2 \times 20 + 1.5)$ సెం.మీ^{2}.

$= 4.71 \times 41.5$ సెం.మీ^{2}.

$= 195.465$ సెం.మీ^{2}.

Example 4 : Mayank made a bird-bath for his garden in the shape of a cylinder with a hemispherical depression at one end (see Fig. 12.9). The height of the cylinder is 1.45 m and its radius is 30 cm. Find the total surface area of the bird-bath. (Take $\pi = \frac{22}{7}$)

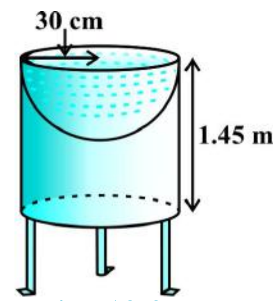


Fig. 12.9

Solution : Let h be height of the cylinder, and r the common radius of the cylinder and hemisphere. Then,

the total surface area of the bird-bath = CSA of cylinder + CSA of hemisphere

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145 + 30) \text{ cm}^2$$

$$= 33000 \text{ cm}^2 = 3.3 \text{ m}^2$$

EXERCISE 12.1

Unless stated otherwise, take $\pi = \frac{22}{7}$.

1. 2 cubes each of volume 64 cm^3 are joined end to end. Find the surface area of the resulting cuboid.
2. A vessel is in the form of a hollow hemisphere mounted by a hollow cylinder. The diameter of the hemisphere is 14 cm and the total height of the vessel is 13 cm. Find the inner surface area of the vessel.
3. A toy is in the form of a cone of radius 3.5 cm mounted on a hemisphere of same radius. The total height of the toy is 15.5 cm. Find the total surface area of the toy.
4. A cubical block of side 7 cm is surmounted by a hemisphere. What is the greatest diameter the hemisphere can have? Find the surface area of the solid.
5. A hemispherical depression is cut out from one face of a cubical wooden block such that the diameter l of the hemisphere is equal to the edge of the cube. Determine the surface area of the remaining solid.
6. A medicine capsule is in the shape of a cylinder with two hemispheres stuck to each of its ends (see Fig. 12.10). The length of the entire capsule is 14 mm and the diameter of the capsule is 5 mm. Find its surface area.

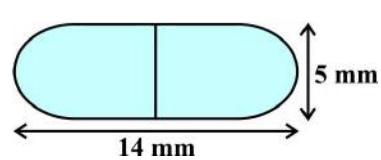
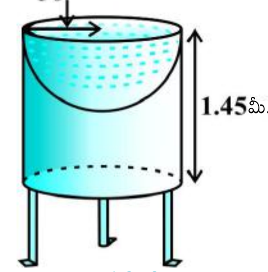


Fig. 12.10

ఉదాహరణ 4 : మయాంక్ వాళ్ళ తోటలో పక్షుల కోసం ఒక నీటి తొట్టెను (పటం 12.9 చూడండి) ఒక వైపు అర్ధగోళాకార లోతు కలిగి ఉన్న స్థూపాకారం లో తయారు చేసాడు. ఆ స్థూపం ఎత్తు 1.45 మీ., వ్యాసార్ధం 30 సెం.మీ. ఆ నీటి తొట్టె సంపూర్ణ తల వైశాల్యం కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి)



పటం 12.9

సాధన : స్థూపం ఎత్తును h గా, స్థూపం, అర్ధగోళాల ఉమ్మడి వ్యాసార్ధమును r గా అనుకుందాం. అప్పుడు,

ఆ నీటి తొట్టె సంపూర్ణ తల వైశాల్యం = స్థూపం వ. త. వై. + అర్ధగోళం వ.త. వై.

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145 \quad 30) \text{ సెం.మీ}^2.$$

$$= 33000 \text{ సెం.మీ}^2 = 3.3 \text{ మీ}^2$$

అభ్యాసం 12.1

ప్రత్యేకంగా ప్రస్తావించని సమస్యలో $\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.

1. ఒక్కొక్క సమ ఘనం ఘనపరిమాణం 64 సెం.మీ^{3} గల 2 సమ ఘనాలను ఒక దాని చివర మరొకటి అతికించారు. ఆ విధంగా ఏర్పడిన దీర్ఘఘనం ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

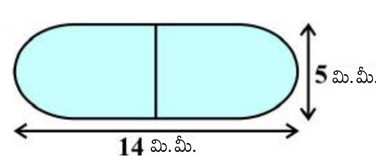
2. గుల్ల అర్ధగోళంపై గుల్ల స్థూపం అమర్చినట్లు ఒక పాత్ర ఉంది. దాని అర్ధగోళ వ్యాసం 14 సెం.మీ. మరియు పాత్ర మొత్తం ఎత్తు 13 సెం.మీ. అయితే ఆ పాత్ర అంతర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

3. ఒక అర్ధ గోళం పై అంతే వ్యాసార్ధం గల శంకువు అమర్చబడిన ఆకారంలో ఒక బొమ్మ ఉంది. శంకువు వ్యాసార్ధం 3.5 సెం.మీ., బొమ్మ మొత్తం ఎత్తు 15.5సెం.మీ. ఆ బొమ్మ సంపూర్ణ తల వైశాల్యం కనుగొనండి.

4. 7 సెం.మీ. భుజం గల సమ ఘనంపై అర్ధగోళం అమర్చబడి ఉంది. ఆ అర్ధగోళానికి ఉండగల గరిష్ఠ వ్యాసం ఎంత? ఆ ఘనాకృతి యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

5. ఒక కొయ్య సమ ఘనం నుండి, అర్ధగోళాకార భాగాన్ని తొలగించారు. అర్ధగోళం వ్యాసం l, ఆ సమఘనం భుజానికి సమానం. మిగిలిన ఘనాకృతి ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

6. ఒక మందు బిళ్ళ రెండు చివరల (పటం 12.10 చూడండి) అర్ధగోళాకారాలు గల స్థూపం వలే ఉన్నది. మందు బిళ్ళ యొక్క పొడవు 14 మి.మీ. మరియు వ్యాసం 5 మి. మీ. అయితే, దాని ఉపరితల వైశాల్యంను కనుగొనండి.



పటం 12.10

7. A tent is in the shape of a cylinder surmounted by a conical top. If the height and diameter of the cylindrical part are 2.1 m and 4 m respectively, and the slant height of the top is 2.8 m, find the area of the canvas used for making the tent. Also, find the cost of the canvas of the tent at the rate of ₹500 per m^2. (Note that the base of the tent will not be covered with canvas.)

8. From a solid cylinder whose height is 2.4 cm and diameter 1.4 cm, a conical cavity of the same height and same diameter is hollowed out. Find the total surface area of the remaining solid to the nearest cm^2.

9. A wooden article was made by scooping out a hemisphere from each end of a solid cylinder, as shown in Fig. 12.11. If the height of the cylinder is 10 cm, and its base is of radius 3.5 cm, find the total surface area of the article.

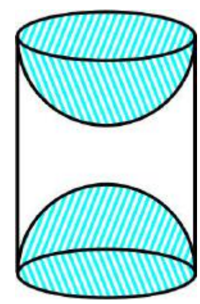


Fig. 12.11

12.3 Volume of a Combination of Solids

In the previous section, we have discussed how to find the surface area of solids made up of a combination of two basic solids. Here, we shall see how to calculate their volumes. It may be noted that in calculating the surface area, we have not added the surface areas of the two constituents, because some part of the surface area disappeared in the process of joining them. However, this will not be the case when we calculate the volume. The volume of the solid formed by joining two basic solids will actually be the sum of the volumes of the constituents, as we see in the examples below.

Example 5 : Shanta runs an industry in a shed which is in the shape of a cuboid surmounted by a half cylinder (see Fig. 12.12). If the base of the shed is of dimension 7 m × 15 m, and the height of the cuboidal portion is 8 m, find the volume of air that the shed can hold. Further, suppose the machinery in the shed occupies a total space of 300 m^3, and there are 20 workers, each of whom occupy about 0.08 m^3 space on an average. Then, how much air is in the shed? (Take $\pi = \frac{22}{7}$)

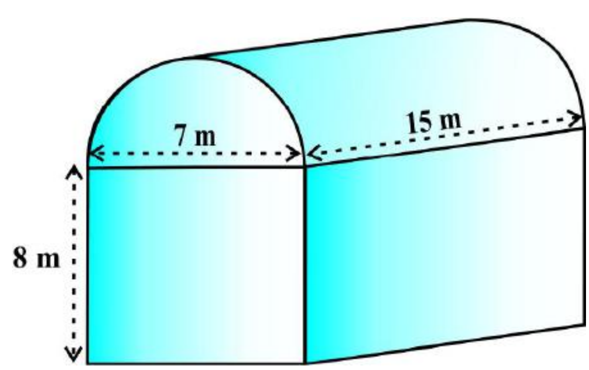
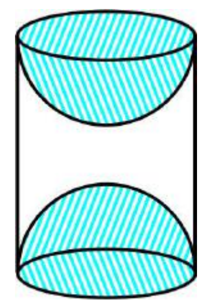


Fig. 12.12

7. ఒక గుడారం స్థూపంపై అమర్చబడిన శంకువు ఆకారంలో ఉంది. స్థూపాకార భాగం యొక్క ఎత్తు, వ్యాసాలు వరుసగా 2.1 మీ. మరియు 4 మీ. శంకువు ఆకారంలో పై భాగం యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు 2.8 మీ. అయితే ఆ గుడారానికి కావలసిన కాన్వాసు గుడ్డ వైశాల్యం కనుగొనండి. అలాగే, ఒక చదరపు మీ. కు ₹500 చొప్పున ఆ గుడారానికి అయిన కాన్వాస్ గుడ్డ మొత్తం ఖరీదు ఎంత? (ఆ గుడారం భూభాగాన్ని కాన్వాస్ గుడ్డతో పరచలేదని గమనించాలి.)

8. 2.4 మీ. ఎత్తు, 1.4 సెం.మీ. వ్యాసం గల ఒక ఘన స్థూపాకర వస్తువు నుండి అంతే ఎత్తు, అంతే వ్యాసం గల శంకువు ఆకారంలో కొంత భాగాన్ని తొలగించారు. మిగిలిన ఘనాకృతి యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యంను సమీప సెం.మీ.^{2} వరకు కనుగొనండి.

9. ఒక స్థూపం రెండు చివరల నుండి అర్ధ గోళాకారంలో తొలగించి పటం 12.11 చూపినట్లుగా ఒక కొయ్య వస్తువు తయారుచేశారు. ఆ స్థూపం ఎత్తు 10 సెం. మీ, భూ వ్యాసార్ధం 3.5 సెం.మీ. అయితే, ఆ వస్తువు యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యం కనుగొనండి.

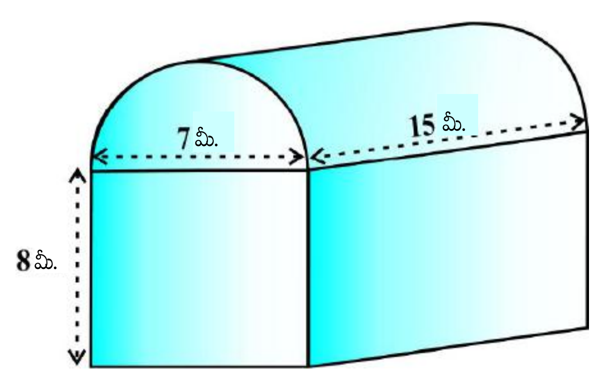


పటం 12.11

12.3 ఘనాకార వస్తు సముదాయము ఘనపరిమాణం

ఇంతకు ముందు భాగంలో, మనం రెండు ప్రాథమిక ఘనాకృతుల సముదాయం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యాలు ఎలా కనుగొనాలో చర్చించాము. ఇక్కడ, వాటి ఘనపరిమాణాలను ఎలా కనుగొనాలో తెలుసుకుంటాము. ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనేటప్పుడు, మనం ఆ రెండు భాగాల ఉపరితల వైశాల్యాలను కలపలేదని గమనించాలి. ఎందుకంటే, వాటిని అమర్చే ప్రక్రియలో కొంత ఉపరితల భాగం కనబడకుండా పోతుంది. కానీ, ఘన పరిమాణాలు కనుక్కునేటప్పుడు ఆ పరిస్థితి ఉండదు. నిజానికి రెండు ప్రాథమిక ఘనాకృతుల సముదాయం వలన ఏర్పడిన ఘనాకృతి యొక్క ఘనపరిమాణం మాత్రం ఆ విడివిడి ఘనపరిమాణాల మొత్తానికి సమానం అవుతుంది. అది ఈ క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా మనం గ్రహించవచ్చు.

ఉదాహరణ 5 : శాంత, తన పరిశ్రమను ఒక దీర్ఘ ఘనాకారం పై, సగం స్తూపం ఉన్న ఆకారంలో గల ఒక షెడ్డులో నడుపుతోంది. (పటం 12.12 చూడండి.) ఆ షెడ్డు యొక్క భూ కొలతలు 7 మీ. × 15 మీ. మరియు దీర్ఘ ఘన భాగం ఎత్తు 8 మీ. ఆ షెడ్డులో నింప దగు గాలి ఘనపరిమాణం కనుగొనండి. అంతే కాకుండా, ఆ షెడ్డులో యంత్ర పరికరాలు 300 మీ^{3}. స్థలాన్ని ఆక్రమిస్తే, 20 మంది పనివాళ్లు సగటున ఒక్కొక్కరు 0.08 మీ^{3}.స్థలాన్ని ఆక్రమించారు. ఆ షెడ్డులో ఉన్న గాలి ఎంత?



పటం 12.12

($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి)

Solution : The volume of air inside the shed (when there are no people or machinery) is given by the volume of air inside the cuboid and inside the half cylinder, taken together.

Now, the length, breadth and height of the cuboid are 15 m, 7 m and 8 m, respectively.

Also, the diameter of the half cylinder is 7 m and its height is 15 m.

So,the required volume =volume of the cuboid + $\frac{1}{2}$ volume of the cylinder

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] \text{m}^3 = 1128.75 \text{ m}^3$$

Next, the total space occupied by the machinery = 300 m^3

And the total space occupied by the workers = 20 × 0.08 m^3 = 1.6 m^3

Therefore, the volume of the air, when there are machinery and workers

$$= 1128.75 - (300.00 + 1.60) = 827.15 \text{ m}^3$$

Example 6 : A juice seller was serving his customers using glasses as shown in Fig. 12.13. The inner diameter of the cylindrical glass was 5 cm, but the bottom of the glass had a hemispherical raised portion which reduced the capacity of the glass. If the height of a glass was 10 cm, find the apparent capacity of the glass and its actual capacity. (Use π = 3.14.)

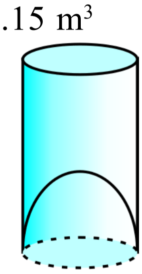


Fig. 12.13

Solution : Since the inner diameter of the glass = 5 cm and height = 10 cm,

the apparent capacity of the glass = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \text{ cm}^3 = 196.25 \text{ cm}^3$$

But the actual capacity of the glass is less by the volume of the hemisphere at the base of the glass.

i.e., it is less by $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5 \text{ cm}^3 = 32.71 \text{ cm}^3$

So,the actual capacity of the glass =apparent capacity of glass – volume of the hemisphere

$$= (196.25 - 32.71) \text{ cm}^3$$

$$= 163.54 \text{ cm}^3$$

సాధన : (మనుషులు, యంత్రాలు లేనప్పుడు) షెడ్డు లోపలి గాలి ఘనపరిమాణం, దీర్ఘ ఘనం మరియు సగం స్థూపంలోని గాలి ఘనపరిమాణాల మొత్తానికి సమానం అవుతుంది.

ఇప్పుడు, దీర్ఘఘన పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా 15 మీ., 7 మీ. మరియు 8 మీ.

అలాగే, సగం స్థూపం యొక్క వ్యాసం 7 మీ., ఎత్తు 15 మీ.

కాబట్టి, కావలసిన ఘనపరిమాణం = దీర్ఘ ఘనం ఘనపరిమాణం + $\frac{1}{2}$ స్థూపం ఘనపరిమాణం

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] \text{మీ.}^3 = 1128.75 \text{ మీ.}^3$$

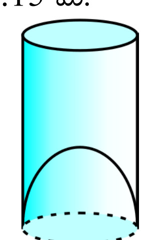
తర్వాత, యంత్ర పరికరాలు ఆక్రమించిన మొత్తం ఘనపరిమాణం = 300 మీ.^{3}

పని మనుషులు ఆక్రమించిన మొత్తం ఘనపరిమాణం = 20 × 0.08 మీ.^{3} = 1.6 మీ.^{3}

కాబట్టి, యంత్రాలు, పనిమనుషులు ఉన్నప్పుడు, గాలి ఘనపరిమాణం

$$= 1128.75 - (300.00 + 1.60) = 827.15 \text{ మీ.}^3$$

ఉదాహరణ 6 : ఒక పండ్ల రసాల వర్తకుడు, పటం 12.13 లో చూపించబడిన గ్లాస్‌లలో అమ్ముతున్నాడు. 5 సెం.మీ. వ్యాసం గల ఆ స్థూపాకార గ్లాస్ అడుగు భాగం అర్ధగోళాకారంలో తొలగించినందు వలన దాని ఘనపరిమాణం తగ్గించబడింది. గ్లాస్ ఎత్తు 10 సెం.మీ. అయితే, దాని ఆ గ్లాస్ యొక్క కనబడే ఘనపరిమాణం మరియు వాస్తవ ఘనపరిమాణం కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ ను ఉపయోగించండి)



పటం 12.13

సాధన : గ్లాస్ లోపలి వ్యాసం = 5 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు = 10 సెం.మీ.,

కాబట్టి కనబడే గ్లాస్ యొక్క ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \text{ సెం.మీ}^3. = 196.25 \text{ సెం.మీ}^3.$$

కానీ, గ్లాస్ వాస్తవ ఘన పరిమాణం, కనబడే ఘనపరిమాణం కన్నా అడుగు భాగంలో గల అర్ధగోళ ఘనపరిమాణమంత తక్కువగా ఉంటుంది.

అంటే, $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$ సెం.మీ^{3} = 32.71 సెం.మీ^{3} తక్కువగా ఉంటుంది.

కాబట్టి, గ్లాస్ వాస్తవ ఘన పరిమాణం = కనబడే గ్లాస్ యొక్క ఘనపరిమాణం – అర్ధగోళ ఘనపరిమాణం

$$= (196.25 - 32.71) \text{ సెం.మీ}^3$$

$$= 163.54 \text{ సెం.మీ}^3$$

Example 7 : A solid toy is in the form of a hemisphere surmounted by a right circular cone. The height of the cone is 2 cm and the diameter of the base is 4 cm. Determine the volume of the toy. If a right circular cylinder circumscribes the toy, find the difference of the volumes of the cylinder and the toy. (Take π = 3.14)

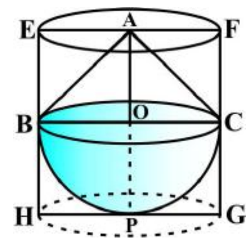


Fig. 12.14

Solution : Let BPC be the hemisphere and ABC be the cone standing on the base of the hemisphere (see Fig. 12.14). The radius BO of the hemisphere (as well as of the cone) $= \frac{1}{2} \times 4$ cm = 2 cm.

So,volume of the toy $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2\right] \text{cm}^3 = 25.12 \text{ cm}^3$$

Now, let the right circular cylinder EFGH circumscribe the given solid. The radius of the base of the right circular cylinder = HP = BO = 2 cm, and its height is

EH = AO + OP = (2 + 2) cm = 4 cm

So, the volume required = volume of the right circular cylinder – volume of the toy

$= (3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12)$ cm^3

$= 25.12$ cm^3

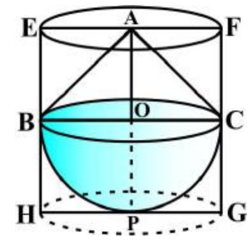
Hence, the required difference of the two volumes = 25.12 cm^3.

EXERCISE 12.2

Unless stated otherwise, take $\pi = \frac{22}{7}$.

A solid is in the shape of a cone standing on a hemisphere with both their radii being equal to 1 cm and the height of the cone is equal to its radius. Find the volume of the solid in terms of π.

2. Rachel, an engineering student, was asked to make a model shaped like a cylinder with two cones attached at its two ends by using a thin aluminium sheet. The diameter of the model is 3 cm and its length is 12 cm. If each cone has a height of 2 cm, find the volume of air contained in the model that Rachel made. (Assume the outer and inner dimensions of the model to be nearly the same.)



పటం 12.14

ఉదాహరణ 7 : ఒక బొమ్మ అర్ధ గోళంపై క్రమ వృత్తాకార శంకువును అమర్చబడి ఉన్న ఘనాకృతి ఆకారంలో ఉంది. శంకువు ఎత్తు, భూ వ్యాసాలూ వరుసగా 2 సెం.మీ. మరియు 4 సెం.మీ. ఆ బొమ్మ ఘన పరిమాణాన్ని కనుగొనండి. ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపంలో పూర్తిగా ఉండేట్లు ఆ బొమ్మను ఉంచితే ఆ స్థూపం మరియు బొమ్మల ఘనపరిమాణాల మధ్య బేధంను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి)

సాధన : BPC అర్ధగోళ భూమిపై ABC శంకువు (పటం12.14 చూడండి) అమర్చబడేలా తీసుకుందాము. అర్ధగోళ వ్యాసార్ధం BO (శంకువు వ్యాసార్ధం కూడా) $= \frac{1}{2} \times 4$ సెం.మీ. $= 2$ సెం.మీ.

కాబట్టి, బొమ్మ ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2\right] \text{సెం.మీ.}^3 = 25.12 \text{ సెం.మీ.}^3$$

ఇప్పుడు, ఒక క్రమ వృత్తాకార స్తూపం EFGH లో పూర్తిగా ఉండేట్లు ఆ బొమ్మను ఉంచమనుకుందాం. ఆ క్రమ వృత్తాకార స్థూప భూ వ్యాసార్ధం $= HP = BO = 2$ సెం. మీ., దాని ఎత్తు

$$EH = AO + OP = (2 + 2) \text{ సెం.మీ.} = 4 \text{ సెం.మీ.}$$

కాబట్టి, కావలసిన ఘనపరిమాణం = క్రమ వృత్తాకార స్థూప ఘనపరిమాణం – బొమ్మ ఘనపరిమాణం

$$= (3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12) \text{ సెం.మీ}^3.$$

$$= 25.12 \text{ సెం.మీ}^3.$$

కాబట్టి, కావలసిన ఘనపరిమాణాల మధ్య బేధం = 25.12 సెం.మీ^{3}.

అభ్యాసం 12.2

ప్రత్యేకంగా ప్రస్తావించని సమస్యలో $\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.

1. ఒక ఘనాకృతి అర్ధ గోళంపై శంకువును అమర్చబడి ఉన్న ఆకారంలో ఉంది. రెండింటి వ్యాసార్ధాలు 1 సెం.మీ.కి సమానం. శంకువు యొక్క ఎత్తు దాని వ్యాసార్ధానికి సమానం. ఆ ఘనాకృతి ఘనపరిమాణంను π లలో కనుగొనండి.

2. ఇంజనీరింగ్ విద్యార్ధిని రాచెల్ కి పలుచని అల్యూమినియం రేకును ఉపయోగించి స్థూపానికి రెండు వైపులా శంకువులను అమర్చబడి ఉండే ఒక నమూనాను తయారుచేయమని అడిగారు. ఆ నమూనా వ్యాసము 3 సెం.మీ. మరియు పొడవు 12 సెం.మీ. ఒక్కొక్క శంకువు ఎత్తు 2 సెం.మీ. అయితే రాచెల్ తయారు చేసిన నమూనాలో ఆవరించబడి ఉన్న గాలి ఘనపరిమాణంను కనుగొనండి. (నమూనా యొక్క బాహ్య, అంతర కొలతలు దాదాపు సమానం అని అనుకోండి)

3. A *gulab jamun,* contains sugar syrup up to about 30% of its volume. Find approximately how much syrup would be found in 45 *gulab jamuns,* each shaped like a cylinder with two hemispherical ends with length 5 cm and diameter 2.8 cm (see Fig. 12.15).

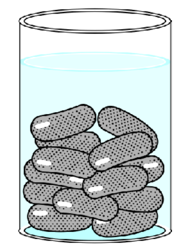


Fig. 12.15

4. A pen stand made of wood is in the shape of a cuboid with four conical depressions to hold pens. The dimensions of the cuboid are 15 cm by 10 cm by 3.5 cm. The radius of each of the depressions is 0.5 cm and the depth is 1.4 cm. Find the volume of wood in the entire stand (see Fig. 12.16).

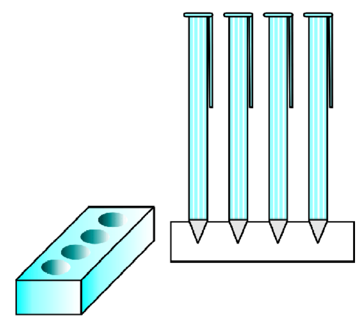


Fig. 12.16

5. A vessel is in the form of an inverted cone. Its height is 8 cm and the radius of its top, which is open, is 5 cm. It is filled with water up to the brim. When lead shots, each of which is a sphere of radius 0.5 cm are dropped into the vessel, one-fourth of the water flows out. Find the number of lead shots dropped in the vessel.

6. A solid iron pole consists of a cylinder of height 220 cm and base diameter 24 cm, which is surmounted by another cylinder of height 60 cm and radius 8 cm. Find the mass of the pole, given that 1 cm^3 of iron has approximately 8g mass. (Use $\pi = 3.14$)

7. A solid consisting of a right circular cone of height 120 cm and radius 60 cm standing on a hemisphere of radius 60 cm is placed upright in a right circular cylinder full of water such that it touches the bottom. Find the volume of water left in the cylinder, if the radius of the cylinder is 60 cm and its height is 180 cm.

8. A spherical glass vessel has a cylindrical neck 8 cm long, 2 cm in diameter; the diameter of the spherical part is 8.5 cm. By measuring the amount of water it holds, a child finds its volume to be 345 cm^3. Check whether she is correct, taking the above as the inside measurements, and $\pi = 3.14$.

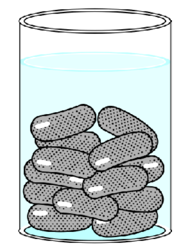
12.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. To determine the surface area of an object formed by combining any two of the basic solids, namely, cuboid, cone, cylinder, sphere and hemisphere.

2. To find the volume of objects formed by combining any two of a cuboid, cone, cylinder, sphere and hemisphere.

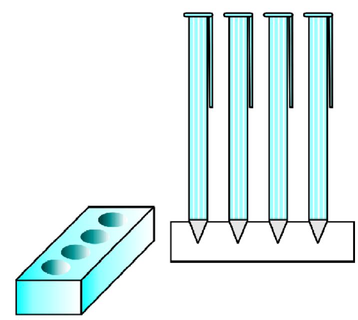
3. ఒక్కొక్క గులాబ్‌జామ్ 5 సెం.మీ. పొడవు, 2.8 వ్యాసం కలిగి స్థూపానికి రెండు వైపులా అర్ధగోళాలు అమర్చినట్లు ఉంది. (పటం 12.15చూడండి). ఒక గులాబ్ జామ్, దాని ఘనపరిమాణంలో 30% చక్కెర పాకం కలిగి ఉంటుంది. అలాంటి 45 గులాబ్‌జామ్‌లలో సుమారుగా ఎంత చక్కెర పాకం ఉంటుంది?



పటం 12.15

4. 15 సెం.మీ. × 10సెం.మీ. × 3.5 సెం.మీ. కొలతలు గల ఒక దీర్ఘ ఘనంలో 0.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం, 1.4 సెం.మీ. లోతుతో శంకువు ఆకారంలో గుంటలు తీసి పెన్నులు పెట్టుకోవడానికి ఒక కొయ్య పెన్ స్టాండ్‌ను తయారు చేసారు. ఆ పెన్ స్టాండ్ యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనండి. (పటం 12.16 చూడండి).

5. బోర్లించబడిన శంకువు ఆకారంలో ఒక పాత్ర కలదు. దాని ఎత్తు 8 సెం.మీ. తెరిచిఉన్నభాగం వైపు వ్యాసార్ధం 5 సెం.మీ. దాని అంచు వరకు నీటితో నింపారు. 0.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల గోళాకార సీసపు గుళ్ళు ఆ పాత్రలో వేసినపుడు, నీటిలో $\frac{1}{4}$ వ భాగం బయటికి పొర్లిపోయింది. అయితే ఆ పాత్రలో ఎన్ని సీసపు గుళ్ళు వేసారో కనుగొనండి.



పటం 12.16

6. 220 సెం.మీ ఎత్తు, భూవ్యాసం 24 సెం.మీ. గల ఒక స్థూపాకార ఇనుప స్తంభం పై 60 సెం.మీ ఎత్తు, వ్యాసార్ధం 8 సెం.మీ. గల మరొక ఇనుప స్థూపం అమర్చబడి ఉంది. 1 సెం.మీ^{3} ఇనుము ద్రవ్యరాశి సుమారుగా 8 గ్రా. అయితే ఆ ఇనుప స్తంభం ద్రవ్యరాశి కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ను ఉపయోగించండి)

7. 60 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల ఒక అర్ధగోళం పై, 120 సెం.మీ.ఎత్తు, 60 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపం అమర్చబడింది. దీనిని పూర్తిగా నీటితో నింపబడి ఉన్న 60సెం.మీ. భూ వ్యాసార్ధం 180 సెం.మీ. ఎత్తు గల క్రమ వృత్తాకార స్థూపంలో అడుగు భాగాన్ని తాకునట్లుగా నిట్టనిలువుగా ఉంచితే, ఆ స్థూపంలో ఇంకా మిగిలివున్న నీటి ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

8. 8.5 సెం.మీ. వ్యాసం గల గోళాకార గాజు పాత్ర పై భాగంలో 8 సెం.మీ. పొడవు, 2 సెం.మీ. వ్యాసం గల స్థూపకార మెడ ఉంది. ఆ పాత్రలో ఉన్న నీటి ఘనపరిమాణం 345 సెం.మీ^{3}. అని ఒక విద్యార్థి కనుగొన్నాడు. పైన ఇవ్వబడినవి అంతర కొలతలుగాను మరియు $\pi = 3.14$ గా తీసుకొని, ఆ విద్యార్థి కనుగొన్నది సరి చూడండి.

12.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు:

1. దీర్ఘఘనం, శంకువు, స్థూపం, గోళం, అర్ధగోళం వంటి ఏదైనా రెండు ప్రాథమిక ఘనాకృతుల సముదాయం ద్వారా ఏర్పడిన వస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుగొనడం.

2. దీర్ఘఘనం, శంకువు, స్థూపం, గోళం, అర్ధగోళం వంటి ఏదైనా రెండు ప్రాథమిక ఘనాకృతుల సముదాయం ద్వారా ఏర్పడిన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణంను కనుగొనడం.

1062CH14

STATISTICS 13

13.1 Introduction

In Class IX, you have studied the classification of given data into ungrouped as well as grouped frequency distributions. You have also learnt to represent the data pictorially in the form of various graphs such as bar graphs, histograms (including those of varying widths) and frequency polygons. In fact, you went a step further by studying certain numerical representatives of the ungrouped data, also called measures of central tendency, namely, *mean*, *median* and *mode*. In this chapter, we shall extend the study of these three measures, i.e., mean, median and mode from ungrouped data to that of *grouped data*. We shall also discuss the concept of cumulative frequency, the cumulative frequency distribution and how to draw cumulative frequency curves, called *ogives*.

13.2 Mean of Grouped Data

The mean (or average) of observations, as we know, is the sum of the values of all the observations divided by the total number of observations. From Class IX, recall that if $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are observations with respective frequencies $f_1, f_2, \ldots, f_n$, then this means observation x_1 occurs f_1 times, x_2 occurs f_2 times, and so on.

Now, the sum of the values of all the observations $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$, and the number of observations $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

So, the mean $\bar{x}$ of the data is given by

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

Recall that we can write this in short form by using the Greek letter Σ (capital sigma) which means summation. That is,

1062CH14

సాంఖ్యక శాస్త్రం 13

13.1 పరిచయం

దత్తాంశాలను అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజనలుగా, అదే విధముగా వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజనలుగా వర్గీకరించడం గురించి మీరు 9వ తరగతిలో నేర్చుకున్నారు. దత్తాంశాలను బార్ గ్రాఫ్‌లు, హిస్టోగ్రామ్ (వేరు వేరు వెడల్పులు గల), పౌనఃపున్య బహుభుజ పటాలు మొదలైన గ్రాఫుల ద్వారా చిత్రాలలో చూపడాన్ని కూడా నేర్చుకున్నారు. అంతేకాక, అవర్గీకృత దత్తాంశాలను నిర్ధిష్టమైన సంఖ్యలతో ప్రాతినిధ్య పరిచే విలువలను కేంద్ర స్థాన విలువలు అంటారని, అవి *సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకం* అని నేర్చుకోవటం ద్వారా ఒక అడుగు ముందుకు వేశారు. ఈ అధ్యాయంలో ఈ మూడు కొలతలు అనగా సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకములను అవర్గీకృత దత్తాంశంల నుండి వర్గీకృత దత్తాంశాల వరకు కొనసాగిస్తాము. సంచిత పౌనఃపున్య విభాజన, ఓజీవ్స్ *(ogives)* అని పిలువబడే సంచిత పౌనఃపున్యవక్రాలను ఎలా గీయాలి అనే విషయాలను చర్చించనున్నాము.

13.2 వర్గీకృత దత్తాంశాల సగటు

రాశుల మొత్తాన్ని రాశుల సంఖ్యచే భాగించిన ఆ రాశుల సగటు (సరాసరి) వస్తుందని మనకు తెలుసు కదా! 9వ తరగతి నుండి $x_1, x_2, \ldots, x_n$ రాశుల యొక్క పౌనఃపున్యాల వరుసగా $f_1, f_2, \ldots, f_n$, అనగా x_1 అనే రాశి f_1 సార్లు, x_2 అనే రాశి f_2 సార్లు, మొదలగునవి వస్తాయని గుర్తుతెచ్చుకోండి.

ఇపుడు రాశుల మొత్తం $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$, మరియు రాశుల సంఖ్య $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

కాబట్టి ఇవ్వబడిన దత్తాంశం యొక్క సగటు $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

దీనిని మనము సంక్షిప్తంగా గ్రీకు అక్షరం Σ (సిగ్మా) అనగా మొత్తంను ఉపయోగించి రాస్తాము అని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

అది,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

which, more briefly, is written as $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$, if it is understood that i varies from 1 to n.

Let us apply this formula to find the mean in the following example.

Example 1 : The marks obtained by 30 students of Class X of a certain school in a Mathematics paper consisting of 100 marks are presented in table below. Find the mean of the marks obtained by the students.

Marks obtained (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
Number of students (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

Solution: Recall that to find the mean marks, we require the product of each x_i with the corresponding frequency f_i. So, let us put them in a column as shown in Table 13.1.

Table 13.1

Marks obtained (x_i)	Number of students (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
Total	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ఇంకా సంక్షిప్తంగా $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ అని రాయవచ్చు. ఇందులో i అనునది 1 నుండి n వరకు మారుతుంది అని అర్థం.
ఈ సూత్రమును క్రింది ఉదాహరణలో సగటు కనుగొనడానికి ఉపయోగించుదాం.

ఉదాహరణ 1 : ఒక పాఠశాలలోని 10వ తరగతికి చెందిన 30 మంది విద్యార్థులు 100 మార్కులు గల గణిత పరీక్షలో పొందిన మార్కులు పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. విద్యార్థులు పొందిన మార్కుల సగటును కనుగొనండి.

పొందిన మార్కులు (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

సాధన: సగటు మార్కులు కనుగొనడానికి ప్రతి x_i మరియు వాటి సంబంధిత పౌనఃపున్యం f_i ల లబ్ధం అవసరమని గుర్తుతెచ్చుకోండి. అందువలన వాటిని పట్టిక 13.1 లో చూపినట్లుగా నిలువు వరుసలో రాద్దాం.

పట్టిక 13.1

పొందిన మార్కులు (x_i)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
మొత్తం	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

Now, $$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

Therefore, the mean marks obtained is 59.3.

In most of our real life situations, data is usually so large that to make a meaningful study it needs to be condensed as grouped data. So, we need to convert given ungrouped data into grouped data and devise some method to find its mean.

Let us convert the ungrouped data of Example 1 into grouped data by forming class-intervals of width, say 15. Remember that, while allocating frequencies to each class-interval, students falling in any upper class-limit would be considered in the next class, e.g., 4 students who have obtained 40 marks would be considered in the class-interval 40-55 and not in 25-40. With this convention in our mind, let us form a grouped frequency distribution table (see Table 13.2).

Table 13.2

Class interval	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
Number of students	2	3	7	6	6	6

Now, for each class-interval, we require a point which would serve as the representative of the whole class. *It is assumed that the frequency of each class-interval is centred around its mid-point*. So the *mid-point* (or *class mark*) of each class can be chosen to represent the observations falling in the class. Recall that we find the mid-point of a class (or its class mark) by finding the average of its upper and lower limits. That is,

$$\textbf{Class mark} = \frac{\textbf{Upper class limit + Lower class limit}}{\textbf{2}}$$

With reference to Table 13.2, for the class 10-25, the class mark is $\frac{10 \quad 25}{2}$, i.e., 17.5. Similarly, we can find the class marks of the remaining class intervals. We put them in Table 13.3. These class marks serve as our x_i's. Now, in general, for the ith class interval, we have the frequency f_i corresponding to the class mark x_i. We can now proceed to compute the mean in the same manner as in Example 1.

ఇప్పుడు, $$\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

కాబట్టి వచ్చిన మార్కుల సగటు 59.3.

మన దైనందిన జీవితంలో చాలా సందర్భాలలో చాలా పెద్ద దత్తాంశాలను సమగ్రంగా అర్థం చేసుకోవడానికి వర్గీకృత దత్తాంశం అవసరము. అందువలన, ఇవ్వబడిన అవర్గీకృత దత్తాంశాన్ని వర్గీకృత దత్తాంశంగా మార్చుకోవల్సిన అవసరం ఉంది దాని సగటు కనుగొనుటకు కొన్ని పద్ధతులను తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ-1లో ఇవ్వబడిన అవర్గీకృత దత్తాంశాన్ని తరగతి అంతరం 15గా ఉండేట్లుగా వర్గీకృత దత్తాంశంగా మార్చుకుందాం. తరగతి అంతరాలలో పౌనఃపున్యాలను కేటాయించేటపుడు ఒక తరగతి ఎగువ హద్దుకు సమానమైన దత్తాంశాన్ని పొందిన విద్యార్థులను తరువాత తరగతిలో చూపించాలని గుర్తుంచుకోవాలి. ఉదాహరణకు 40 మార్కులు పొందిన నలుగురు విద్యార్థులను 25–40 తరగతిలో కాకుండా తరువాత తరగతి 40 – 55 లోకి తీసుకోవాలి. దీనిని దృష్టిలో ఉంచుకొని మనం వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టికను తయారు చేసుకుందాం. (పట్టిక 13.2 చూడండి).

పట్టిక 13.2

తరగతి అంతరం	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	7	6	6	6

ఇపుడు ప్రతి తరగతి మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒక విలువ మనకు అవసరము. ప్రతి తరగతి పౌనఃపున్యము ఆ తరగతి యొక్క మధ్యవిలువ చుట్టూ కేంద్రీకృతమైనట్లుగా భావిస్తారు. కాబట్టి ఒక తరగతి యొక్క మధ్య విలువ (లేదా తరగతి విలువ) ఆ తరగతి యొక్క అన్ని విలువలకు ప్రాతినిధ్యంగా భావిస్తాము. తరగతి యొక్క మధ్య విలువ (Class mark) అనేది ఆ తరగతి యొక్క ఎగువ మరియు దిగువ అవధుల సరాసరి అని గుర్తుంచుకోవాలి.

$$\textbf{తరగతి మధ్య విలువ} = \frac{\textbf{ఆ తరగతి ఎగువ అవధి} + \textbf{ఆ తరగతి దిగువ అవధి}}{\mathbf{2}}$$

పట్టిక 13.2లో ఉన్నట్లుగా, 10 – 25 అనే తరగతి యొక్క తరగతి మధ్య విలువ $\frac{10 \quad 25}{2}$, అది 17.5. అదే విధంగా మిగిలిన తరగతుల యొక్క తరగతి మధ్య విలువలను కనుగొనవచ్చు. ఈ తరగతి మధ్య విలువలను x_i లుగా సూచిస్తూ పట్టికలో పొందుపరుస్తాము. సాధారణముగా, మనము i వ తరగతి అంతరానికి f_i పౌనఃపున్యానికి సంబంధిత తరగతి మధ్య విలువ x_i ను కలిగి ఉంటాయని తెలుసు. ఇపుడు సగటు కనుగొనుటకు పై ఉదాహరణ – 1 మాదిరిగా చేద్దాం.

Table 13.3

Class interval	Number of students (f_i)	Class mark (x_i)	$f_i x_i$
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 - 100	6	92.5	555.0
Total	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

The sum of the values in the last column gives us $\Sigma f_i x_i$. So, the mean $\bar{x}$ of the given data is given by

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

This new method of finding the mean is known as the **Direct Method**.

We observe that Tables 13.1 and 13.3 are using the same data and employing the same formula for the calculation of the mean but the results obtained are different. Can you think why this is so, and which one is more accurate? The difference in the two values is because of the mid-point assumption in Table 13.3, 59.3 being the exact mean, while 62 an approximate mean.

Sometimes when the numerical values of x_i and f_i are large, finding the product of x_i and f_i becomes tedious and time consuming. So, for such situations, let us think of a method of reducing these calculations.

We can do nothing with the f_i's, but we can change each x_i to a smaller number so that our calculations become easy. How do we do this? What about subtracting a fixed number from each of these x_i's? Let us try this method.

The first step is to choose one among the x_i's as the *assumed mean*, and denote it by 'a'. Also, to further reduce our calculation work, we may take 'a' to be that x_i which lies in the centre of $x_1, x_2, \ldots, x_n$. So, we can choose $a = 47.5$ or $a = 62.5$. Let us choose $a = 47.5$.

The next step is to find the difference d_i between a and each of the x_i's, that is, the **deviation** of 'a' from each of the x_i's.

i.e., $$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

పట్టిక 13.3

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	మధ్య విలువ (x_i)	$f_i x_i$
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 - 100	6	92.5	555.0
మొత్తం	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

పై పట్టికలో చివరి నిలువ వరుసలలో గల విలువల మొత్తం $\Sigma f_i x_i$ ను సూచిస్తుంది. కాబట్టి ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క సగటు $\bar{x}$ విలువ,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

సగటును కనుగొనే ఈ కొత్త పద్ధతిని **'ప్రత్యక్ష పద్ధతి'** అంటారు.

పట్టిక 13.1 మరియు 13.3 లు ఒకే దత్తాంశాన్ని మరియు ఒకే సూత్రాన్ని సగటు కనుగొనడానికి ఉపయోగించినప్పటికి వేరు వేరుగా ఫలితాలు వచ్చాయని మనము గమనించవచ్చు. ఇది ఎందుకు వచ్చిందో మీరు ఆలోచించగలరా? మరియు ఏది వీటిలో ఖచ్చితమైనది? రెండు విలువలు వేరు వేరుగా రావడానికి ఊహించిన మధ్య విలువ గల పట్టిక 13.3లో, ఖచ్చిత సగటు 59.3 కాగా, 62 అనేది సరాసరి సగటు.

కొన్నిసార్లు x_i మరియు f_i ల సంఖ్యల విలువలు చాలా పెద్దగా ఉండి x_i మరియు f_i ల యొక్క లబ్ధాన్ని గణించడం కష్టం మరియు ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. అందువలన అలాంటి సందర్భాల కొరకు, గణనను సులభతరం చేయుటకు మరొక పద్ధతి గూర్చి ఆలోచిద్దాం.

మనము f_i లను మార్చే అవకాశం లేదు కాని x_i మరియు f_i ల లబ్ధమును సులభతరం చేయుటకు x_i లను చిన్న విలువలుగా మార్చుకోవచ్చును. కాని ఇది ఎలా చేయగలం? ఒకే సంఖ్యను ప్రతి గణన x_i నుండి తీసివేసిన ఏలా వస్తాయో ప్రయత్నించి చూద్దాం.

మొదటి సోపానంలో x_i లలోని ఒకదాని విలువను *ఊహించిన సగటుగా* ఎన్నుకుంటాము. దీనిని 'a' చే సూచిస్తాము. గణనలను మున్ముందు సులభతరం చేయడానికి $x_1, x_2, \ldots, x_n$. లలో మధ్యలో ఉండే విలువలను 'a' గా ఎంచుకుంటాము. $a = 47.5$ లేదా $a = 62.5$. కావున మనము ఇక్కడ $a = 47.5$ గా ఎన్నుకుందాం.

తరువాత సోపానంలో ప్రతి x_i నుండి a యొక్క భేదము $x_i - a$ ను d_i గా కనుగొందాం. ఇది ప్రతి x_i నుండి a యొక్క **విచలనము** అవుతుంది.

అంటే, $$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

The third step is to find the product of d_i with the corresponding f_i, and take the sum of all the $f_i d_i$'s. The calculations are shown in Table 13.4.

Table 13.4

Class interval	**Number of students (f_i)**	**Class mark (x_i)**	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–60
25 - 40	3	32.5	–15	–45
40 - 55	7	47.5	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
Total	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

So, from Table 13.4, the mean of the deviations, $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$.

Now, let us find the relation between $\bar{d}$ and $\bar{x}$.

Since in obtaining d_i, we subtracted 'a' from each x_i, so, in order to get the mean $\bar{x}$, we need to add 'a' to $\bar{d}$. This can be explained mathematically as:

Mean of deviations, $$\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

So, $$\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

So, $$\bar{x} = a + \bar{d}$$

i.e., $$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

మూడవ సోపానంలో d_i మరియు వాటి సంబంధిత పౌనఃపున్యం (f_i) లబ్ధాన్ని మరియు $f_i d_i$ ల యొక్క మొత్తాన్ని కనుగొంటాము. ఈ గణనలు క్రింది పట్టికలో చూపబడ్డాయి.

పట్టిక 13.4

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్య విలువ (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–60
25 - 40	3	32.5	–15	–45
40 - 55	7	47.5	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
మొత్తం	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

అందువలన పట్టిక 13.4 నుండి విచలనాల సగటు $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$.

ఇపుడు $\bar{d}$ మరియు $\bar{x}$ ల మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొందాం.

d_i ని పొందడానికి మనకు ప్రతి x_i నుండి 'a' ను తీసివేసినాము. అందువలన సగటు $\bar{x}$ ను పొందడానికి 'a' ను $\bar{d}$ కి కూడవలసిన అవసరం ఉన్నది. దీనిని గణితపరంగా క్రింది విధంగా వివరించడమైనది:

విచలనాల సగటు, $$\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

అందువలన, $$\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

కావున, $$\bar{x} = a + \bar{d}$$

i.e., $$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

Substituting the values of a, $\Sigma f_i d_i$ and Σf_i from Table 13.4, we get

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62.$$

Therefore, the mean of the marks obtained by the students is 62.

The method discussed above is called the **Assumed Mean Method**.

Activity 1 : From the Table 13.3 find the mean by taking each of x_i (i.e., 17.5, 32.5, and so on) as 'a'. What do you observe? You will find that the mean determined in each case is the same, i.e., 62. (Why ?)

So, we can say that the value of the mean obtained does not depend on the choice of 'a'.

Observe that in Table 13.4, the values in Column 4 are all multiples of 15. So, if we divide the values in the entire Column 4 by 15, we would get smaller numbers to multiply with f_i. (Here, 15 is the class size of each class interval.)

So, let $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$, where a is the assumed mean and h is the class size.

Now, we calculate u_i in this way and continue as before (i.e., find $f_i u_i$ and then $\Sigma f_i u_i$). Taking h = 15, let us form Table 13.5.

Table 13.5

Class interval	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–2	–4
25 - 40	3	32.5	–15	–1	–3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
Total	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

Let $$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$$

Here, again let us find the relation between $\bar{u}$ and $\bar{x}$.

పట్టిక 13.4లోని a, $\Sigma f_i d_i$ మరియు Σf_i ల విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62.$$

ఈ విధంగా, విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల సగటు 62.

పైన చర్చించబడిన పద్ధతిని **ఊహించిన సగటు పద్ధతి** అంటారు.

కృత్యము 1 : పట్టిక 13.3 నుండి, ప్రతి x_i (అనగా 17.5, 32.5, ...) ను 'a' గా తీసుకొని సగటును కనుక్కోండి. మీరు ఏమి గమనించారు? ప్రతి పద్ధతిలోనూ సగటు ఒకటే అనగా 62. (ఎందుకు?)

కావున పొందిన సరాసరి విలువ 'a' యొక్క ఎంపిక మీద ఆధారపడలేదని మనం చెప్పవచ్చు.

పట్టిక 13.4ను గమనించినట్లైతే 4వ నిలువ వరుసలోని విలువలన్నీ 15 యొక్క గుణిజాలే. అందువల్ల ఒకవేళ మనం 4వ నిలువ వరుసలోని విలువలను 15చే భాగించగా మనకు ఆ విలువలు చిన్న సంఖ్యలలో వస్తాయి. అప్పుడు ఆ విలువలను f_iతో గుణించడం సులభం. (ఇక్కడ 15 అనేది తరగతి అంతరం)

అందువలన $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ గా తీసుకుంటాము, ఇక్కడ a ఊహించిన సగటు మరియు h అనేది తరగతి అంతరం.

ఇపుడు, పై విధంగా u_i విలువలను వరుసగా కనుగొనాలి. దీని కోసం గత పద్ధతిని అనుసరిద్దాం. (అంటే $f_i u_i$ కనుగొనాలి తరువాత $\Sigma f_i u_i$ విలువ కనుగొనాలి) $h = 15$ గా తీసుకొని పట్టిక 13.5ను నిర్మిద్దాం.

పట్టిక 13.5

తరగతి అంతరం	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–2	–4
25 - 40	3	32.5	–15	–1	–3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
మొత్తం	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$$ గా తీసుకోవాలి.

ఇక్కడ మరల $\bar{u}$ మరియు $\bar{x}$ ల మధ్య సంబంధం కనుగొందాం.

We have, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

Therefore, $$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i - a\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}[\bar{x} - a]$$

So, $h\bar{u} = \bar{x} - a$

i.e., $\bar{x} = a + h\bar{u}$

So, $$\bar{x} = a + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$$

Now, substituting the values of a, h, $\Sigma f_i u_i$ and Σf_i from Table 14.5, we get

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

So, the mean marks obtained by a student is 62.

The method discussed above is called the **Step-deviation** method.

We note that :

- the step-deviation method will be convenient to apply if all the d_i's have a common factor.
- The mean obtained by all the three methods is the same.
- The assumed mean method and step-deviation method are just simplified forms of the direct method.
- The formula $\bar{x} = a + h\bar{u}$ still holds if a and h are not as given above, but are any non-zero numbers such that $u_i = \frac{x_i - a}{h}$.

Let us apply these methods in another example.

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$ అని మనకు తెలుసు

కాబట్టి,
$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i - a\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}[\bar{x} - a]$$

అందువల్ల, $h\bar{u} = \bar{x} - a$

అంటే, $\bar{x} = a + h\bar{u}$

కావున, $$\bar{x} = a + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$$

ఇపుడు పట్టిక 14.5లో $a, h, \Sigma f_i u_i$ మరియు Σf_i విలువలను ప్రతిక్షేపించగా ఈ విధంగా వచ్చును.

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

అందువలన విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల సగటు 62.

పైన చర్చించిన పద్ధతిని **సోపాన విచలన పద్ధతి** అంటారు.

మనం గమనించవలసినది :

- ఒక వేళ అన్ని d_iలకు ఉమ్మడి కారణాంకాలు ఉంటే సోపాన విచలన పద్ధతి అనేది వినియోగించడానికి అనుకూలమైన పద్ధతి.
- పై మూడు పద్ధతుల ద్వారా కనుగొనబడిన సగటు విలువ ఒకటే.
- ఊహించిన సగటు పద్ధతి, సోపాన విచలన పద్ధతులు అనేవి ప్రత్యక్ష పద్ధతిని సులభతరం చేయబడిన పద్ధతులు మాత్రమే.
- ఒక వేళ a మరియు h విలువలు పై విధంగా ఇవ్వనప్పటికినీ, శూన్యేతర సంఖ్యలు $\bar{x} = a + h\bar{u}$ అనే సూత్రం వ్యవస్థితం అవుతుంది. ఎందుకనగా $u_i = \frac{x_i - a}{h}$.

ఈ పద్ధతులను వేరొక ఉదాహరణకు అనువర్తింపచేద్దాం.

Example 2 : The table below gives the percentage distribution of female teachers in the primary schools of rural areas of various states and union territories (U.T.) of India. Find the mean percentage of female teachers by all the three methods discussed in this section.

Percentage o.f female teachers	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85
Number of States/U.T.	6	11	7	4	4	2	1

Source : *Seventh All India School Education Survey conducted by NCERT*

Solution : Let us find the class marks, x_i, of each class, and put them in a column (see Table 13.6):

Table 13.6

Percentage of female teachers	**Number of States /U.T. (f_i)**	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

Here we take $a = 50$, $h = 10$, then $d_i = x_i - 50$ and u_i $\frac{x_i - 50}{10}$.

We now find d_i and u_i and put them in Table 13.7.

ఉదాహరణ 2 : భారతదేశములోని వివిధ రాష్ట్రాలు మరియు కేంద్రపాలిత ప్రాంతాల (U.T.) కు చెందిన ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో గల మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతముల వివరములు ఈ కింది పట్టికలో పొందుపరచబడినాయి.
ఈ విభాగంలో చర్చించిన మూడు పద్ధతులను ఉపయోగించి మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతాన్ని కనుక్కోండి.

మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతం	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85
రాష్ట్రాలు లేదా కేంద్రపాలిత ప్రాంతాల సంఖ్య	6	11	7	4	4	2	1

మూలం : *NCERT వారు నిర్వహించిన 7వ అఖిలభారతీయ పాఠశాల విద్యా సర్వే గణాంకాల ప్రకారం.*

సాధన : ప్రతి తరగతి యొక్క తరగతి మధ్యవిలువ x_i కనుగొందాం మరియు వానిని ఒక నిలువ వరుసలో పొందుపరుచుదాం. (పట్టిక 13.6 చూడండి.):

పట్టిక 13.6

మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతం	రాష్ట్రాలు లేదా కేంద్రపాలిత ప్రాంతాల సంఖ్య (f_i)	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

ఇక్కడ $a = 50, h = 10$ గా తీసుకుందాము. అపుడు $d_i = x_i - 50$ మరియు $u_i \quad \frac{x_i - 50}{10}$.

ఇపుడు మనం d_i, u_i లను కనుగొని వాటిని పట్టిక 13.7లో పొందుపరచుదాం.

Table 13.7

Percentage of female teachers	Number of states/U.T. (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25 - 35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35 - 45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45 - 55	4	50	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
Total	**35**				**1390**	**–360**	**–36**

From the table above, we obtain $\Sigma f_i = 35$, $\Sigma f_i x_i = 1390$,

$$\Sigma f_i d_i = -360, \quad \Sigma f_i u_i = -36.$$

Using the direct method, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

Using the assumed mean method,

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

Using the step-deviation method,

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

Therefore, the mean percentage of female teachers in the primary schools of rural areas is 39.71.

Remark : The result obtained by all the three methods is the same. So the choice of method to be used depends on the numerical values of x_i and f_i. If x_i and f_i are sufficiently small, then the direct method is an appropriate choice. If x_i and f_i are numerically large numbers, then we can go for the assumed mean method or step-deviation method. If the class sizes are unequal, and x_i are large numerically, we can still apply the step-deviation method by taking h to be a suitable divisor of all the d_i's.

పట్టిక 13.7

మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతం	రాష్ట్రాలు/కేంద్ర పాలిత ప్రాంతాల సంఖ్య (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25 - 35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35 - 45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45 - 55	4	50	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
మొత్తం	**35**				**1390**	**–360**	**–36**

పై పట్టిక నుండి $\Sigma f_i = 35$, $\Sigma f_i x_i = 1390$ గా పొందుతాము.

$$\Sigma f_i d_i = -360, \quad \Sigma f_i u_i = -36.$$

ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ఊహించిన సగటు పద్ధతి ద్వారా,

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

సోపాన విచలన పద్ధతి ద్వారా,

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

కాబట్టి గ్రామీణ ప్రాంత ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో గల మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతం 39.71.

సూచన : పై మూడు పద్ధతుల ద్వారా సాధించబడిన ఫలితము ఒకటే. వీటిలో ఏ పద్ధతిని ఎన్నుకోవాలి, అనేది x_i మరియు f_i ల సంఖ్య విలువల మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. x_i మరియు f_i లు తగినంత చిన్నవిగా ఉన్నపుడు ప్రత్యక్ష పద్ధతి ఉపయోగించడం సరైన ఎంపిక. ఒకవేళ x_i మరియు f_i ల విలువలు పెద్ద సంఖ్యలు అయినపుడు ఊహించిన సగటు పద్ధతి ద్వారా సులభంగా చేయవచ్చు లేదా సోపాన విచన పద్ధతి కూడా అనుకూలమైనదే. ఒకవేళ తరగతి పొడవులు వేరువేరు ఉండి మరియు x_i విలువలు పెద్ద సంఖ్యలు అయినపుడు కూడా మనం అన్ని d_i ల యొక్క సామాన్య కారణాంకాన్ని h తీసుకొనడం ద్వారా సోపాన విచలన పద్ధతిలో సగటు కనుగొనవచ్చును.

Example 3 : The distribution below shows the number of wickets taken by bowlers in one-day cricket matches. Find the mean number of wickets by choosing a suitable method. What does the mean signify?

Number of wickets	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
Number of bowlers	7	5	16	12	2	3

Solution : Here, the class size varies, and the x_i,s are large. Let us still apply the step-deviation method with $a = 200$ and $h = 20$. Then, we obtain the data as in Table 13.8.

Table 13.8

Number of wickets taken	Number of bowlers (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 - 60	7	40	–160	–8	–56
60 - 100	5	80	–120	–6	–30
100 - 150	16	125	–75	–3.75	–60
150 - 250	12	200	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
Total	**45**				**–106**

So, $\bar{u} = \frac{-106}{45}$. Therefore, $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$.

This tells us that, on an average, the number of wickets taken by these 45 bowlers in one-day cricket is 152.89.

Now, let us see how well you can apply the concepts discussed in this section!

ఉదాహరణ 3: వన్ డే క్రికెట్ ఆటలో బౌలర్లు సాధించిన వికెట్ వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్య విభజన పట్టికలో చూపించడమైనది. సరైన పద్ధతి ఎంచుకొని బౌలర్లు సాధించిన సగటు వికెట్లను కనుగొనుము. ఈ సగటు యొక్క ప్రాముఖ్యత ఏమిటి?

వికెట్ల సంఖ్య	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
బౌలర్ల సంఖ్య	7	5	16	12	2	3

సాధన : ఇచ్చట తరగతి అంతరాలు వేరువేరుగా ఉన్నాయి మరియు x_i విలువలు పెద్దవిగా ఉన్నాయి. $a = 200$ మరియు $h = 20$ తో మనము సోపాన విచలన పద్ధతిని ఉపయోగిద్దాం. అప్పుడు 13.8 పట్టిక వలే దత్తాంశం వచ్చును.

పట్టిక 13.8

తీసుకున్న వికెట్ల సంఖ్య	బౌలర్ల సంఖ్య (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 - 60	7	40	−160	−8	−56
60 - 100	5	80	−120	−6	−30
100 - 150	16	125	−75	−3.75	−60
150 - 250	12	200	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
మొత్తం	**45**				**−106**

అందువలన, $\bar{u} = \frac{-106}{45}$. కాబట్టి, $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89.$

45 మంది బౌలర్లు వన్ డే క్రికెట్‌లో సాధించిన వికెట్ల సగటు 152.89 అని తెలుస్తుంది.

ఇపుడు ఈ సెక్షన్‌లో చర్చించిన అంశాలను మీరు ఏవిధంగా ఉపయోగించగలరో చూద్దాం!

Activity 2 :

Divide the students of your class into three groups and ask each group to do one of the following activities.

1. Collect the marks obtained by all the students of your class in Mathematics in the latest examination conducted by your school. Form a grouped frequency distribution of the data obtained.
2. Collect the daily maximum temperatures recorded for a period of 30 days in your city. Present this data as a grouped frequency table.
3. Measure the heights of all the students of your class (in cm) and form a grouped frequency distribution table of this data.

After all the groups have collected the data and formed grouped frequency distribution tables, the groups should find the mean in each case by the method which they find appropriate.

EXERCISE 13.1

1. A survey was conducted by a group of students as a part of their environment awareness programme, in which they collected the following data regarding the number of plants in 20 houses in a locality. Find the mean number of plants per house.

Number of plants	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
Number of houses	1	2	1	5	6	2	3

Which method did you use for finding the mean, and why?

2. Consider the following distribution of daily wages of 50 workers of a factory.

Daily wages (in ₹)	500 - 520	520 -540	540 - 560	560 - 580	580 -600
Number of workers	12	14	8	6	10

Find the mean daily wages of the workers of the factory by using an appropriate method.

3. The following distribution shows the daily pocket allowance of children of a locality. The mean pocket allowance is Rs 18. Find the missing frequency f.

Daily pocket allowance (in ₹)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
Number of children	7	6	9	13	f	5	4

కృత్యము 2 :

మీ తరగతిలోని విద్యార్థులందరిని మూడు సముహాలుగా చేసి ఒక్కొక్క సమూహం కింద ఇచ్చిన కృత్యాలలో ఒక దానిని చేయమనండి.

1. మీ పాఠశాలలో ఇటీవల నిర్వహించిన పరీక్షల్లో గణితంలో మీ తరగతి విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు సేకరించండి. దీనికి వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారు చేయండి.
2. మీ పట్టణంలో 30 రోజుల్లో నమోదు అయిన గరిష్ట ఉష్ణోగ్రతల వివరాలను సేకరించండి. ఇట్టి దత్తాంశాన్ని వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో చూపండి.
3. మీ తరగతిలో విద్యార్థుల యొక్క ఎత్తులను (సెం.మీ.లలో) కొలిచి, అట్టి సమాచారానికి వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారు చేయండి.

అన్ని సముహాలవారు సేకరించిన దత్తాంశాలను వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలను తయారుచేసి, ఎవరికి అనువైన పద్ధతిని వారు ఎన్నుకొని సగటు కనుక్కోమనండి.

అభ్యాసం 13.1

1. ఒక గ్రామంలో కొంత మంది విద్యార్థుల జట్టు 'పర్యావరణ పరిరక్షణ – అవగాహన' అనే కార్యక్రమంలో భాగంగా 20 ఇళ్ళలో సర్వే నిర్వహించారు. వారు ఎన్నెన్ని మొక్కలు నాటారో సమాచారాన్ని సేకరించి కింది పట్టికలో నమోదు చేసారు. సగటున ఒక ఇంటికి ఎన్ని మొక్కలు నాటారో కనుక్కోండి.

మొక్కల సంఖ్య	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
ఇళ్ళ సంఖ్య	1	2	1	5	6	2	3

మీరు సగటు కనుక్కోవడానికి ఏ పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు, ఎందుకు?

2. ఒక కర్మాగారంలోని 50 మంది కార్మికుల దినసరి భత్యము, పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో కింది విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

దినసరి భత్యము (₹ లలో)	500 - 520	520 -540	540 - 560	560 - 580	580 -600
కార్మికుల సంఖ్య	12	14	8	6	10

తగిన పద్ధతి ఎంచుకొని ఆ కర్మాగారంలోని కార్మికుల సగటు భత్యము కనుక్కోండి.

3. ఒక ఆవాస ప్రాంతంలో పిల్లల రోజువారి చేతి ఖర్చుల వివరాలు ఈ కింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. పిల్లల సగటు చేతి ఖర్చు ₹18 అయిన కింది పట్టికలో లోపించిన పౌనఃపున్యం (f) కనుక్కోండి.

పిల్లల రోజువారి చేతి ఖర్చు (₹ లలో)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
పిల్లల సంఖ్య	7	6	9	13	f	5	4

4. Thirty women were examined in a hospital by a doctor and the number of heartbeats per minute were recorded and summarised as follows. Find the mean heartbeats per minute for these women, choosing a suitable method.

No. of heartbeats per minute	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
Number of women	2	4	3	8	7	4	2

5. In a retail market, fruit vendors were selling mangoes kept in packing boxes. These boxes contained varying number of mangoes. The following was the distribution of mangoes according to the number of boxes.

Number of mangoes	50 - 52	53 -55	56 - 58	59 - 61	62 -64
Number of boxes	15	110	135	115	25

Find the mean number of mangoes kept in a packing box. Which method of finding the mean did you choose?

6. The table below shows the daily expenditure on food of 25 households in a locality.

Daily expenditure (in ₹)	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
Number of households	4	5	12	2	2

Find the mean daily expenditure on food by a suitable method.

7. To find out the concentration of SO_2 in the air (in parts per million, i.e., ppm), the data was collected for 30 localities in a certain city and is presented below:

Concentration of SO_2 (in ppm)	**Frequency**
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

Find the mean concentration of SO_2 in the air.

4. ఒక వైద్యశాలలో వైద్యులు 30 మంది స్త్రీలకు పరీక్షలు నిర్వహించి ప్రతి నిమిషానికి వారి యొక్క హృదయ స్పందనలను సంగ్రహపరచి కింద చూపిన పట్టికలో నమోదు చేశారు. సరైన పద్ధతిని ఎన్నుకొని, ప్రతి నిమిషానికి ఈ స్త్రీల యొక్క హృదయ స్పందనలను సరాసరి కనుగొనండి.

నిమిషానికి హృదయ స్పందనల సంఖ్య	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
స్త్రీల సంఖ్య	2	4	3	8	7	4	2

5. ఒక రిటైల్ మార్కెట్‌లో, పండ్ల వ్యాపారులు మామిడి పండ్లను పెట్టెలలో ఉంచి అమ్ముతున్నారు. ఒక్కొక్క పెట్టెలో ఉండే మామిడి పండ్ల సంఖ్య వేరువేరుగా ఉంటుంది. పెట్టెల సంఖ్యను బట్టి మామిడి పండ్ల పంపకాన్ని ఈ క్రింది విధంగా చూపడమైనది.

మామిడి పండ్ల సంఖ్య	50 - 52	53 -55	56 - 58	59 - 61	62 -64
పెట్టెల సంఖ్య	15	110	135	115	25

ఒక్కొక్క పెట్టెలో ఉండే మామిడి పండ్ల సగటు కనుగొనండి. సగటు కనుగొనుటకు మీరు ఏ పద్ధతిని ఎంపిక చేసుకుంటారు?

6. ఒక ఆవాస ప్రాంతంలోని 25 కుటుంబాలకు సంబంధించిన దినసరి ఆహారపు ఖర్చుల వివరాలను పట్టిక తెలియజేయుచున్నది.

రోజువారి ఆహారపు ఖర్చు (₹ లలో)	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య	4	5	12	2	2

సరైన పద్ధతి ద్వారా దినసరి అయ్యే సగటు ఆహారపు ఖర్చును కనుగొనుము..

7. ఒక పట్టణంలోని 30 నివాస ప్రాంతాలలో గాలిలో గల SO_2 యొక్క గాఢత (in parts per million, i.e., ppm)ను, కనుగొనుటకు దత్తాంశంను సేకరించారు మరియు అది కింది పట్టికలో తెలియజేశారు:

SO_2 యొక్క గాఢత (in ppm)	**పౌనఃపున్యము**
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

గాలిలో గల సగటు SO_2 యొక్క గాఢతను కనుగొనుము.

8. A class teacher has the following absentee record of 40 students of a class for the whole term. Find the mean number of days a student was absent.

Number of days	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
Number of students	11	10	7	4	4	3	1

9. The following table gives the literacy rate (in percentage) of 35 cities. Find the mean literacy rate.

Literacy rate (in %)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
Number of cities	3	10	11	8	3

13.3 Mode of Grouped Data

Recall from Class IX, a mode is that value among the observations which occurs most often, that is, the value of the observation having the maximum frequency. Further, we discussed finding the mode of ungrouped data. Here, we shall discuss ways of obtaining a mode of grouped data. It is possible that more than one value may have the same maximum frequency. In such situations, the data is said to be multimodal. Though grouped data can also be multimodal, we shall restrict ourselves to problems having a single mode only.

Let us first recall how we found the mode for ungrouped data through the following example.

Example 4 : The wickets taken by a bowler in 10 cricket matches are as follows:

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

Find the mode of the data.

Solution : Let us form the frequency distribution table of the given data as follows:

Number of wickets	0	1	2	3	4	5	6
Number of matches	1	1	3	2	1	1	1

8. ఒక తరగతి ఉపాధ్యాయుడు ఒక టర్మ్‌లో తన తరగతికి చెందిన 40 మంది విద్యార్థుల గైరుహాజరు వివరాలను, ఈ కింద చూపిన పట్టికలో చూపబడినది. ఈ టర్మ్‌లో ఒక విద్యార్థి సగటు గైరుహాజరును కనుగొనండి.

రోజుల సంఖ్య	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
విద్యార్థుల సంఖ్య	11	10	7	4	4	3	1

9. 35 పట్టణాలకు సంబంధించిన అక్షరాస్యత రేటు (శాతాలలో) ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. సగటు అక్షరాస్యత రేటును కనుగొనండి.

అక్షరాస్యత రేటు (% లలో)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
పట్టణాల సంఖ్య	3	10	11	8	3

13.3 వర్గీకృత దత్తాంశాల యొక్క బాహుళకం

బాహుళకము ఇచ్చిన పరిశీలనల్లో ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయ్యేది అని 9వ తరగతిలో నేర్చుకున్న విషయాన్ని గుర్తుచేసుకోండి. అనగా పరిశీలనల యొక్క గరిష్ట పౌనఃపున్యము. అంతేకాక అవర్గీకృత దత్తాంశాల బాహుళకాన్ని కనుగొనటాన్ని చర్చించాం. ఇపుడు మనం వర్గీకృత దత్తాంశాల బాహుళకాన్ని కనుగొనే విధానాన్ని చర్చిద్దాం. ఒకటి కంటే ఎక్కువ పరిశీలనలు ఒకే గరిష్ట పౌనఃపున్యాన్ని కలిగివుండడం కూడా సాధ్యమని గమనించవచ్చు. ఇలాంటి సందర్భాలలో దత్తాంశాలను బహు బాహుళక దత్తాంశాలు అంటారు. ఇలాంటి వర్గీకృత దత్తాంశాలు వున్నా మనం ఏక బాహుళక సమస్యలను మాత్రమే నేర్చుకుందాం.

కింది ఉదాహరణలతో మొదట అవర్గీకృత దత్తాంశాల బాహుళకాన్ని కనుగొనేదాన్ని గుర్తుచేసుకుందాం.

ఉదాహరణ 4 : 10 క్రికెట్ మ్యాచ్‌లలో ఒక బౌలర్ తీసిన వికెట్లు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి:

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

ఈ దత్తాంశానికి 'బాహుళకము' కనుగొనండి.

సాధన : దత్తాంశంలోని అంకెలను ఒక క్రమంలో అమర్చగా ఈ కింది పట్టికలో విధంగా పౌనఃపున్య పట్టిక తయారుచేద్దాం.

వికెట్ల సంఖ్య	0	1	2	3	4	5	6
మ్యాచ్‌ల సంఖ్య	1	1	3	2	1	1	1

Clearly, 2 is the number of wickets taken by the bowler in the maximum number (i.e., 3) of matches. So, the mode of this data is 2.

In a grouped frequency distribution, it is not possible to determine the mode by looking at the frequencies. Here, we can only locate a class with the maximum frequency, called the **modal class**. The mode is a value inside the modal class, and is given by the formula:

$$\text{Mode} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

where l = lower limit of the modal class,

h = size of the class interval (assuming all class sizes to be equal),

f_1 = frequency of the modal class,

f_0 = frequency of the class preceding the modal class,

f_2 = frequency of the class succeeding the modal class.

Let us consider the following examples to illustrate the use of this formula.

Example 5 : A survey conducted on 20 households in a locality by a group of students resulted in the following frequency table for the number of family members in a household:

Family size	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
Number of families	7	8	2	2	1

Find the mode of this data.

Solution : Here the maximum class frequency is 8, and the class corresponding to this frequency is 3 – 5. So, the modal class is 3 – 5.

Now

modal class = 3 – 5, lower limit (l) of modal class = 3, class size (h) = 2

frequency (f_1) of the modal class = 8,

frequency (f_0) of class preceding the modal class = 7,

frequency (f_2) of class succeeding the modal class = 2.

Now, let us substitute these values in the formula :

పై దత్తాంశాన్ని పరిశీలించగా ఎక్కువ మ్యాచ్‌లలో బౌలర్ 2 వికెట్లను తీసినట్లుగా స్పష్టంగా తెలుస్తున్నది (అనగా 3 సార్లు) అందువల్ల దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము 2.

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనానికి పౌన:పున్యాలను పరిశీలించి బాహుళకం కనుక్కోవడం సాధ్యం కాదు. ఇక్కడ మనం గరిష్ట పౌనఃపున్యం ఉన్న ఒక తరగతిని మాత్రం సూచించగలం, అట్టి తరగతిని **'బాహుళక తరగతి'** అంటారు. బాహుళకం బాహుళక తరగతిలో ఉండే ఒక విలువ బాహుళకము అగును. దీనిని కింది సూత్రం సహాయంతో లెక్కించవచ్చును.

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

ఇక్కడ l = బాహుళక తరరగతి యొక్క దిగువ అవధి,

h = బాహుళక తరగతి పొడవు (అన్ని తరగతుల పొడవులు సమానం),

f_1 = బాహుళక తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం,

f_0 = బాహుళక తరగతికి ముందు ఉన్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం,

f_2 = బాహుళక తరగతికి తరువాత ఉన్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం.

ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి బాహుళకమును కనుగొనే విధానాన్ని ఈ కింది ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలిస్తాం.

ఉదాహరణ 5 : ఒక ఆవాస ప్రాంతంలో కొంత మంది విద్యార్థుల బృందం 20 కుటుంబాల సంఖ్యను, కుటుంబంలో ఉన్న సభ్యుల సంఖ్య ఆధారంగా పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో ఈ క్రింది విధంగా చూపబడినది:

కుటుంబ పరిమాణం	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
కుటుంబాల సంఖ్య	7	8	2	2	1

ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకం కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చట తరగతి యొక్క గరిష్ట పౌనఃపున్యము 8, ఇంకా ఈ పౌన:పున్యానికి సంబంధించిన తరగతి $3 - 5$. అందువలన బాహుళక తరగతి $3 - 5$.

ఇప్పుడు

బాహుళక తరగతి $= 3 - 5$, బాహుళక తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు $(l) = 3$, తరగతి పొడవు $(h) = 2$

బాహుళక తరగతి పౌనఃపున్యం $(f_1) = 8$,

బాహుళక తరగతికి ముందు ఉన్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం $(f_0) = 7$,

బాహుళక తరగతికి తరువాత ఉన్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం $(f_2) = 2$.

ఇపుడు, ఈ విలువలను సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించుదాం:

$$\text{Mode} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

Therefore, the mode of the data above is 3.286.

Example 6 : The marks distribution of 30 students in a mathematics examination are given in Table 13.3 of Example 1. Find the mode of this data. Also compare and interpret the mode and the mean.

Solution : Refer to Table 13.3 of Example 1. Since the maximum number of students (i.e., 7) have got marks in the interval 40 - 55, the modal class is 40 - 55. Therefore,

the lower limit (l) of the modal class = 40,

the class size (h) = 15,

the frequency (f_1) of modal class = 7,

the frequency (f_0) of the class preceding the modal class = 3,

the frequency (f_2) of the class succeeding the modal class = 6.

Now, using the formula:

$$\text{Mode} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h,$$

we get

$$\text{Mode} = 40 + \left(\frac{7 - 3}{14 - 6 - 3}\right) \times 15 = 52$$

So, the mode marks is 52.

Now, from Example 1, you know that the mean marks is 62.

So, the maximum number of students obtained 52 marks, while on an average a student obtained 62 marks.

Remarks :

1. In Example 6, the mode is less than the mean. But for some other problems it may be equal or more than the mean also.
2. It depends upon the demand of the situation whether we are interested in finding the average marks obtained by the students or the average of the marks obtained by most

$$\text{బాహుళకం} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

కనుక, పై దత్తాంశం యొక్క బాహుళకం 3.286

ఉదాహరణ 6 : ఒక తరగతిలోని 30 మంది విద్యార్థులు ఒక గణిత పరీక్షలో పొందిన మార్కులు ఉదాహరణ –1 పట్టిక 13.3లో ఇవ్వబడినవి. ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకం కనుక్కోండి. అదే విధంగా బాహుళకము మరియు సగటులను పోల్చి వ్యాఖ్యానించుము.

సాధన : ఉదాహరణ–1 లోని పట్టిక 13.3లో సూచించిన విధంగా దత్తాంశంలోని ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు (7 గురు) 40 – 55 తరగతి అంతరంలోని మార్కులు సాధించి ఉన్నారు. కనుక 40 – 55 అనేది బాహుళకము తరగతి అవుతుంది. కనుక,

బాహుళక తరగతి యొక్క దిగువహద్దు $(l) = 40$,

బాహుళక తరగతి పొడవు $(h) = 15$,

బాహుళక తరగతి పౌనఃపున్యం $(f_1) = 7$,

బాహుళక తరగతికి ముందు ఉన్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం $(f_0) = 3$,

బాహుళక తరగతికి తరువాత ఉన్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం $(f_2) = 6$.

ఇపుడు, సూత్రమును ఉపయోగించి:

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h,$$

$$\text{బాహుళకము} = 40 + \left(\frac{7-3}{14-6-3}\right) \times 15 = 52$$

కావున, బాహుళక మార్కులు 52.

ఇపుడు ఉదాహరణ –1 నుండి సగటు 62 అని మనకు తెలుసు.

కావున, ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు 52 మార్కులు తెచ్చుకున్నారు అయితే విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 62.

సూచనలు :

1. ఉదాహరణ 6 లో బాహుళకం, సగటు కన్నా తక్కువ. కాని కొన్ని సమస్యలలో సమానం కాని లేదా సగటు కన్నా ఎక్కువ గాని ఉండవచ్చు.

2. సందర్భాన్ని బట్టి విద్యార్థులకు వచ్చిన సరాసరి మార్కులు లేదా ఎక్కువ మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు సరాసరిని కనుగొంటారు.

of the students. In the first situation, the mean is required and in the second situation, the mode is required.

Activity 3 : Continuing with the same groups as formed in Activity 2 and the situations assigned to the groups. Ask each group to find the mode of the data. They should also compare this with the mean, and interpret the meaning of both.

Remark : The mode can also be calculated for grouped data with unequal class sizes. However, we shall not be discussing it.

EXERCISE 13.2

1. The following table shows the ages of the patients admitted in a hospital during a year:

Age (in years)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
N0. of patients	6	11	21	23	14	5

Find the mode and the mean of the data given above. Compare and interpret the two measures of central tendency.

2. The following data gives the information on the observed lifetimes (in hours) of 225 electrical components :

Lifetimes (in hours)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
Frequency	10	35	52	61	38	29

Determine the modal lifetimes of the components.

3. The following data gives the distribution of total monthly household expenditure of 200 families of a village. Find the modal monthly expenditure of the families. Also, find the mean monthly expenditure :

Expenditure (in ₹)	Number of families
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

మొదటి సందర్భంలో సగటు, రెండవ సందర్భంలో బాహుళకము కావల్సివుంది.

కృత్యము 3 : కృత్యం 2లో తీసుకున్న సమూహాలను కొనసాగిస్తూ ఆ సందర్భాలను సమూహాలకు ఇవ్వడం. ప్రతి గ్రూపుకు దత్తాంశాల బాహుళకాన్ని కనుక్కోమని తెలిపి వారు దాన్ని సరాసరితో పోల్చి రెండింటి అర్థాన్ని వివరించాలి.

గమనిక : వేరు వేరు తరగతి అంతరాలు గల దత్తాంశాలకు కూడా వర్గీకృత దత్తాంశాల బాహుళకాన్ని కనుగొనవచ్చు. అయితే మనం దీని గురించి చర్చించడం లేదు.

అభ్యాసం 13.2

1. ఒక సంవత్సరకాలంలో ఒక వైద్యశాలలో చేరిన రోగుల యొక్క వయస్సుల వివరాలు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినాయి:

వయస్సు (సం॥లలో)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
రోగుల సంఖ్య	6	11	21	23	14	5

పై దత్తాంశానికి సగటు, బాహుళకములను కనుగొనండి. రెండు కేంద్ర స్థానవిలువలను పోల్చి వ్యాఖ్యానించండి.

2. కింది పట్టికలో 225 విద్యుత్ పరికరాల జీవితకాలం (గంటలలో) వివరాలు ఇవ్వబడినాయి :

జీవితకాలం (గంటలలో)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
పౌనఃపున్యం	10	35	52	61	38	29

విద్యుత్ పరికరాల జీవితకాల బాహుళకాన్ని నిర్ధారించండి.

3. ఒక గ్రామంలో 200 కుటుంబాల యొక్క నెలసరి ఖర్చుల వివరాలను ఈ కింది పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. కుటుంబాల యొక్క నెలసరి ఖర్చుల బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి. అదే విధంగా నెలసరి సరాసరి ఖర్చును కనుగొనండి.

నెలసరి ఖర్చు (₹లలో)	కుటుంబాల సంఖ్య
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

4. The following distribution gives the state-wise teacher-student ratio in higher secondary schools of India. Find the mode and mean of this data. Interpret the two measures.

Number of students per teacher	Number of states / U.T.
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. The given distribution shows the number of runs scored by some top batsmen of the world in one-day international cricket matches.

Runs scored	Number of batsmen
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10000	1
10000 - 11000	1

Find the mode of the data.

6. A student noted the number of cars passing through a spot on a road for 100 periods each of 3 minutes and summarised it in the table given below. Find the mode of the data :

No. of cars	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
Frequency	7	14	13	12	20	11	15	8

4. భారతదేశం యొక్క ఉన్నత, మాధ్యమిక పాఠశాలల్లో రాష్ట్రాల వారీగా గల ఉపాధ్యాయ, విద్యార్థి నిష్పత్తి విలువలు ఈ క్రింది పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని, సగటును కనుగొనండి. ఈ రెండు కేంద్రస్థాన విలువలపై వ్యాఖ్యానించండి.

ప్రతి ఒక్క ఉపాధ్యాయునికి పిల్లల సంఖ్య	రాష్ట్రాల / U.T. ల సంఖ్య
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. అంతర్జాతీయ వన్‌డే క్రికెట్ మ్యాచ్‌ల్లో ప్రపంచంలో అత్యున్నత శ్రేణి బ్యాట్స్‌మెన్‌లు సాధించిన పరుగుల వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో చూపించడమైనది.

సాధించిన పరుగులు	బ్యాట్స్‌మెన్‌ల సంఖ్య
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10000	1
10000 - 11000	1

పై దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.

6. ఒక విద్యార్థి రోడ్డుపై ఒక స్థానం నుండి వెళ్ళే కార్ల సంఖ్య ప్రతి 3 నిమిషాలకు ఒకసారి, 100 పీరియడ్‌లలో లెక్కించి వివరాలను ఈ క్రింది పట్టికలో నమోదు చేశాడు. ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.

కార్ల సంఖ్య	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
పౌనఃపున్యం	7	14	13	12	20	11	15	8

13.4 Median of Grouped Data

As you have studied in Class IX, the median is a measure of central tendency which gives the value of the middle-most observation in the data. Recall that for finding the median of ungrouped data, we first arrange the data values of the observations in ascending order. Then, if n is odd, the median is the $\left(\frac{n+1}{2}\right)$th observation. And, if n is even, then the median will be the average of the $\frac{n}{2}$th and the $\left(\frac{n}{2}+1\right)$th observations.

Suppose, we have to find the median of the following data, which gives the marks, out of 50, obtained by 100 students in a test :

Marks obtained	20	29	28	33	42	38	43	25
Number of students	6	28	24	15	2	4	1	20

First, we arrange the marks in ascending order and prepare a frequency table as follows :

Table 13.9

Marks obtained	**Number of students (Frequency)**
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
Total	**100**

13.4 వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము

9వ తరగతిలో చదివిన విధంగా, మధ్యగతము అనేది ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని పరిశీలనాంశాల యొక్క మధ్య విలువను తెలిపే కేంద్ర స్థాన విలువలో ఒకటి. అవర్గీకృత దత్తాంశాలకు మధ్యగతమును కనుగొనే విధానాన్ని ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. ముందుగా దత్తాంశంలోని రాశులను లేదా పరిశీలనాంశాలను ఆరోహణక్రమంలో అమర్చుకోవాలి. అపుడు n బేసిసంఖ్య అయిన మధ్యగతము అనేది $\left(\frac{n+1}{2}\right)$వ రాశి అవుతుంది మరియు n సరిసంఖ్య అయిన మధ్యగతము $\frac{n}{2}$ వ రాశి మరియు $\left(\frac{n}{2} \quad 1\right)$వ రాశుల సరాసరి అవుతుంది.

ఒక పరీక్షలో 50 మార్కులకు, 100 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులను కింది పట్టికలో ఇచ్చారనుకుందాం. ఈ దత్తాంశానికి మధ్యగతాన్ని మనం కనుక్కుందాం:

సాధించిన మార్కులు	20	29	28	33	42	38	43	25
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	28	24	15	2	4	1	20

మొదట మనం మార్కులను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చి, పౌనఃపున్యపట్టికను ఈ క్రింది విధంగా తయారు చేయాలి:

పట్టిక 13.9

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనఃపున్యం)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
మొత్తం	**100**

Here $n = 100$, which is even. The median will be the average of the $\frac{n}{2}$th and the $\left(\frac{n}{2}+1\right)$th observations, i.e., the 50th and 51st observations. To find these observations, we proceed as follows:

Table 13.10

Marks obtained	Number of students
20	6
upto 25	6 + 20 = 26
upto 28	26 + 24 = 50
upto 29	50 + 28 = 78
upto 33	78 + 15 = 93
upto 38	93 + 4 = 97
upto 42	97 + 2 = 99
upto 43	99 + 1 = 100

Now we add another column depicting this information to the frequency table above and name it as *cumulative frequency column*.

Table 13.11

Marks obtained	Number of students	Cumulative frequency
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

ఇక్కడ $n = 100$, ఇది ఒక సరిసంఖ్య. అప్పుడు, మధ్యగతము $\frac{n}{2}$వ రాశి మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$వ రాశుల సరాసరి అవుతుంది. అనగా 50వ రాశి, 51వ రాశుల సరాసరి అవుతుంది. ఈ రాశులను కనుగొనడానికి మనం క్రింది విధంగా చేయాలి:

పట్టిక 13.10

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
20	6
25 వరకు	6 + 20 = 26
28 వరకు	26 + 24 = 50
29 వరకు	50 + 28 = 78
33 వరకు	78 + 15 = 93
38 వరకు	93 + 4 = 97
42 వరకు	97 + 2 = 99
43 వరకు	99 + 1 = 100

ఇప్పుడు, ఈ సమాచారం ఆధారంగా పై పట్టికలో పౌనఃపున్య పట్టికకు మరొక నిలువ వరుసను కలపడం ద్వారా వచ్చే నూతన పట్టికను *సంచిత పౌనఃపున్య పట్టిక*గా పేర్కొంటాము.

పట్టిక 13.11

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచిత పౌనఃపున్యము
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

From the table above, we see that:

50th observaton is 28 (Why?)

51st observation is 29

So, $\text{Median} = \dfrac{28 + 29}{2} = 28.5$

Remark : The part of Table 13.11 consisting Column 1 and Column 3 is known as *Cumulative Frequency Table*. The median marks 28.5 conveys the information that about 50% students obtained marks less than 28.5 and another 50% students obtained marks more than 28.5.

Now, let us see how to obtain the median of grouped data, through the following situation.

Consider a grouped frequency distribution of marks obtained, out of 100, by 53 students, in a certain examination, as follows:

Table 13.12

Marks	Number of students
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

From the table above, try to answer the following questions:

How many students have scored marks less than 10? The answer is clearly 5.

పై పట్టిక నుండి కింది విషయాలు గమనించవచ్చు:

50వ పరిశీలనాంశం 28 (ఎందుకు?)

51వ పరిశీలనాంశం 29

అందువలన, మధ్యగతము $= \frac{28 + 29}{2} = 28.5$

సూచన : పై పట్టికలో 1వ మరియు 3వ నిలువు వరుసలను *సంచిత పౌనఃపున్య పట్టిక* అంటాము. మధ్యగత మార్కులు 28.5 అనేది 50% మంది విద్యార్థులకు 28.5 మార్కుల కంటే ఎక్కువగాను, 50% మంది విద్యార్థులకు 28.5 కంటే తక్కువ వచ్చాయనే విషయాన్ని తెలుపుతుంది.

ఇపుడు, వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము ఏవిధంగా సాధిస్తామో ఈ క్రింది సందర్భం ద్వారా తెలుసుకుంటాము.

కింద పట్టికలో వర్గీకృత దత్తాంశంలో ఒక పరీక్షలో 100 మార్కులకు గాను 53 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు ఇవ్వబడినవి అనుకుందాం:

పట్టిక 13.12

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

పై పట్టిక ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలను చెప్పే ప్రయత్నం చేద్దాం:

10 కంటే తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు ఎంత మంది? 5 మంది అని మనకు స్పష్టంగా తెలుసు.

How many students have scored less than 20 marks? Observe that the number of students who have scored less than 20 include the number of students who have scored marks from 0 - 10 as well as the number of students who have scored marks from 10 - 20. So, the total number of students with marks less than 20 is 5 + 3, i.e., 8. We say that the cumulative frequency of the class 10 - 20 is 8.

Similarly, we can compute the cumulative frequencies of the other classes, i.e., the number of students with marks less than 30, less than 40, . . ., less than 100. We give them in Table 13.13 given below:

Table 13.13

Marks obtained	**Number of students (Cumulative frequency)**
Less than 10	5
Less than 20	5 + 3 = 8
Less than 30	8 + 4 = 12
Less than 40	12 + 3 = 15
Less than 50	15 + 3 = 18
Less than 60	18 + 4 = 22
Less than 70	22 + 7 = 29
Less than 80	29 + 9 = 38
Less than 90	38 + 7 = 45
Less than 100	45 + 8 = 53

The distribution given above is called the *cumulative frequency distribution of the less than type*. Here 10, 20, 30, . . . 100, are the upper limits of the respective class intervals.

We can similarly make the table for the number of students with scores, more than or equal to 0, more than or equal to 10, more than or equal to 20, and so on. From Table 13.12, we observe that all 53 students have scored marks more than or equal to 0. Since there are 5 students scoring marks in the interval 0 - 10, this means that there are 53 – 5 = 48 students getting more than or equal to 10 marks. Continuing in the same manner, we get the number of students scoring 20 or above as 48 – 3 = 45, 30 or above as 45 – 4 = 41, and so on, as shown in Table 13.14.

20 కంటే తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంతో చెప్పండి? 20 కంటే తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు, 0 – 10 మార్కులు పొందినవారు, 10 – 20 మార్కులు పొందిన వారు కూడా కలిసి ఉంటారు. కాబట్టి 20 కంటే తక్కువ మార్కులు పొందినవారు 5 + 3 అనగా 8 మంది విద్యార్థులు. అందువల్ల మనం 10 – 20 అనే తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం 8గా చెప్పవచ్చు.

అదే విధంగా మనం మిగిలిన తరగతుల యొక్క సంచిత పౌన:పున్యాలను కూడా కనుగొనవచ్చును. అంటే 30 మార్కుల కంటే తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను, 40 మార్కుల కంటే తక్కువ ...... 100 మార్కుల కంటే తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనవచ్చును. వాటిని ఈ క్రింది పట్టిక 13.13లో ఇచ్చాము.

పట్టిక 13.13

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (సంచిత పౌనఃపున్యం)
10 కంటే తక్కువ	5
20 కంటే తక్కువ	5 + 3 = 8
30 కంటే తక్కువ	8 + 4 = 12
40 కంటే తక్కువ	12 + 3 = 15
50 కంటే తక్కువ	15 + 3 = 18
60 కంటే తక్కువ	18 + 4 = 22
70 కంటే తక్కువ	22 + 7 = 29
80 కంటే తక్కువ	29 + 9 = 38
90 కంటే తక్కువ	38 + 7 = 45
100 కంటే తక్కువ	45 + 8 = 53

పైన తెలిపిన పట్టికను *ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక* అంటాము. ఇక్కడ 10, 20, ... 100 లు వరుస తరగతుల యొక్క ఎగువ అవధులు అవుతాయి.

అదే విధంగా 0 గాని అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారి సంఖ్య, 10 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారి సంఖ్య, 20 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారి సంఖ్య .... గల పట్టికను మనం తయారు చేయవచ్చు. పట్టిక 13.12 నుండి '0' లేదా '0' కంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారు 53 మంది ఉన్నారని మనం పరిశీలించవచ్చు. 5 మంది విద్యార్థులు 0–10 తరగతిలో ఉన్నారు కాబట్టి 10 కాని అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య 53 – 5 = 48గా నిర్ధారించవచ్చు. ఇదే విధంగా దీనిని కొనసాగించగా 20 గాని అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య 48 – 3 = 45 అవుతుంది. ఇలాగే 30 గాని అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య 45 – 4 = 41 అవుతుంది. ఇది పట్టిక 13.14లో చూపబడింది.

Table 13.14

Marks obtained	Number of students (Cumulative frequency)
More than or equal to 0	53
More than or equal to 10	53 – 5 = 48
More than or equal to 20	48 – 3 = 45
More than or equal to 30	45 – 4 = 41
More than or equal to 40	41 – 3 = 38
More than or equal to 50	38 – 3 = 35
More than or equal to 60	35 – 4 = 31
More than or equal to 70	31 – 7 = 24
More than or equal to 80	24 – 9 = 15
More than or equal to 90	15 – 7 = 8

The table above is called a *cumulative frequency distribution of the more than type*. Here 0, 10, 20, . . ., 90 give the lower limits of the respective class intervals.

Now, to find the median of grouped data, we can make use of any of these cumulative frequency distributions.

Let us combine Tables 13.12 and 13.13 to get Table 13.15 given below:

Table 13.15

Marks	Number of students (f)	Cumulative frequency (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

Now in a grouped data, we may not be able to find the middle observation by looking at the cumulative frequencies as the middle observation will be some value in

పట్టిక 13.14

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (సంచిత పౌనఃపున్యం)
0 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	53
10 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	53 – 5 = 48
20 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	48 – 3 = 45
30 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	45 – 4 = 41
40 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	41 – 3 = 38
50 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	38 – 3 = 35
60 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	35 – 4 = 31
70 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	31 – 7 = 24
80 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	24 – 9 = 15
90 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	15 – 7 = 8

పై పట్టికను *అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక* అంటారు. ఇక్కడ 0, 10, 20, ... 90 లు వరుస తరగతుల యొక్క దిగువ అవధులు అవుతాయి.

ఇపుడు వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతాన్ని కనుగొనడంలో, ఈ సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికల నుండి ఏదైన ఒక దానిని ఉపయోగించుకోవచ్చు.

క్రింది ఇచ్చిన పట్టిక 13.15 రాయడానికి పట్టిక 13.12 మరియు 13.13లను కలిపి ఉపయోగిద్దాం:

పట్టిక 13.15

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యం (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

ఇప్పుడు వర్గీకృత దత్తాంశంలో సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికల నుండి మధ్య విలువ అనేది ఏదో కనుగొనలేకపోవచ్చు. కానీ మధ్య విలువ ఖచ్చితంగా ఒక తరగతి అంతరంలోని ఏదో ఒక విలువ అవుతుంది.

a class interval. It is, therefore, necessary to find the value inside a class that divides the whole distribution into two halves. But which class should this be?

To find this class, we find the cumulative frequencies of all the classes and $\frac{n}{2}$. We now locate the class whose cumulative frequency is greater than (and nearest to) $\frac{n}{2}\cdot$ This is called the *median class*. In the distribution above, n = 53. So, $\frac{n}{2}$ = 26.5. Now 60 – 70 is the class whose cumulative frequency 29 is greater than (and nearest to) $\frac{n}{2}$, i.e., 26.5.

Therefore, 60 – 70 is the **median class**.

After finding the median class, we use the following formula for calculating the median.

$$\text{Median} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f} \right) \times h,$$

where l = lower limit of median class,

n = number of observations,

cf = cumulative frequency of class preceding the median class,

f = frequency of median class,

h = class size (assuming class size to be equal).

Substituting the values $\frac{n}{2} = 26.5,\ l = 60$, cf = 22, f = 7, h = 10

in the formula above, we get

$$\text{Median} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7} \right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

So, about half the students have scored marks less than 66.4, and the other half have scored marks more than 66.4.

కాబట్టి ఈ మొత్తం విభాజనమును రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించే తరగతిలో ఒక మధ్య విలువను మనం కనుగొనవలసి ఉంటుంది. కాని అది ఏ తరగతి అవుతుందో కనుక్కోవడం ఏలా?

ఈ తరగతి కనుక్కోవడానికి మనం $\frac{n}{2}$ విలువను, అన్ని తరగతుల యొక్క సంచిత పౌన:పున్యాలను కనుక్కుంటాము. తర్వాత ఏ తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం $\frac{n}{2}$ కంటే ఎక్కువగా (లేదా దగ్గరగా) ఉంటుందో ఆ తరగతిని మధ్యగత తరగతిగా గుర్తిస్తాము. పై విభాజనము నందు $n = 53$ కావున $\frac{n}{2} = 26.5$. ఇప్పుడు $\frac{n}{2}$; 26.5 కన్నా పెద్దదైన (లేదా దగ్గరగా) కనీస సంచిత పౌనఃపున్యము 29 గల తరగతి 60 – 70.

కాబట్టి, 60 – 70 అనునది **మధ్యగత తరగతి** అవుతుంది.

మధ్యగత తరగతిని కనుగొన్న తరువాత, కింది సూత్రమును ఉపయోగించి మధ్యగతమును కనుగొంటాము.

$$\text{మధ్యగతం} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h,$$

ఇందులో $l =$ మధ్యగత తరగతి దిగువ అవధి,

$n =$ దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య,

$\text{cf} =$ మధ్యగత తరగతికి ముందు తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం.

$f =$ మధ్యతరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం

$h =$ తరగతి పొడవు (తరగతి పొడవులు సమానంగా ఉన్నాయనుకోండి.)

$\frac{n}{2} = 26.5,\ l = 60,\ \text{cf} = 22,\ f = 7,\ h = 10$ విలువలను

పై సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించగా,

$$\text{మధ్యగతము} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4 \text{ అవుతుంది.}$$

కావున, తరగతిలోని సగం మంది విద్యార్థులకు 66.4 కన్నా తక్కువ మార్కులు, మిగిలిన సగం మంది విద్యార్థులకు 66.4 కన్నా ఎక్కువ మార్కులు వచ్చి ఉంటాయి.

Example 7 : A survey regarding the heights (in cm) of 51 girls of Class X of a school was conducted and the following data was obtained:

Height (in cm)	Number of girls
Less than 140	4
Less than 145	11
Less than 150	29
Less than 155	40
Less than 160	46
Less than 165	51

Find the median height.

Solution : To calculate the median height, we need to find the class intervals and their corresponding frequencies.

The given distribution being of the *less than type*, 140, 145, 150, . . ., 165 give the upper limits of the corresponding class intervals. So, the classes should be below 140, 140 - 145, 145 - 150, . . ., 160 - 165. Observe that from the given distribution, we find that there are 4 girls with height less than 140, i.e., the frequency of class interval below 140 is 4. Now, there are 11 girls with heights less than 145 and 4 girls with height less than 140. Therefore, the number of girls with height in the interval 140 - 145 is 11 – 4 = 7. Similarly, the frequency of 145 - 150 is 29 – 11 = 18, for 150 - 155, it is 40 – 29 = 11, and so on. So, our frequency distribution table with the given cumulative frequencies becomes:

Table 13.16

Class intervals	Frequency	Cumulative frequency
Below 140	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

ఉదాహరణ 7 : ఒక పాఠశాలలోని 10వ తరగతిలోని 51 మంది బాలికల ఎత్తు (సెం.మీ.లలో) గురించి సర్వే నిర్వహించబడినది ఆ దత్తాంశం కింది విధంగా ఉన్నది:

ఎత్తు (సెం.మీ. లలో)	బాలికల సంఖ్య
140 కన్నా తక్కువ	4
145 కన్నా తక్కువ	11
150 కన్నా తక్కువ	29
155 కన్నా తక్కువ	40
160 కన్నా తక్కువ	46
165 కన్నా తక్కువ	51

మధ్యగత ఎత్తును కనుగొనండి.

సాధన : మధ్యగత ఎత్తును కనుక్కోవడానికి మొదట తరగతి అంతరాలను మరియు వాటికి సంబంధించిన పౌన:పున్యాలను కనుగొనవలెను.

ఇచ్చిన ఆరోహణ సంచిత పౌన:పున్యాల పట్టికలో 140, 145, 145.......165లు సంబంధిత తరగతుల యొక్క ఎగువ అవధులు. అందువలన, తరగతులు 140 కన్నా తక్కువ, 140 - 145, 145 - 150, ... 160 - 165 అవుతాయి. ఇచ్చిన విభజనను గమనించినట్లైతే 140 కన్నా తక్కువ ఎత్తు గల బాలికల సంఖ్య 4గా మనం తెలుసుకోగలం. అది 140 కన్నా తక్కువ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం 4. ఇప్పుడు 145 కన్నా తక్కువ ఎత్తు గల బాలికలు 11 మంది ఉన్నారు మరియు 140 కన్నా తక్కువ ఎత్తు ఉన్న బాలికలు 4. కాబట్టి 140 - 145 ఈ తరగతి అంతరంలో ఎత్తు గల బాలికల సంఖ్య $11 - 4 = 7$ అవుతుంది. అదే విధంగా 145 - 150 యొక్క పౌనఃపున్యం $29 - 11 = 18$, 150 - 155 యొక్క పౌనఃపున్యం $40 - 29 = 11$ మొదలగునవి. కాబట్టి, సంచిత పౌన:పున్యాల నుండి మన పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక ఈ విధంగా వస్తుంది:

పట్టిక 13.16

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
140 కన్నా తక్కువ	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

Now $n = 51$. So, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$. This observation lies in the class 145 - 150. Then,

l (the lower limit) = 145,

cf (the cumulative frequency of the class preceding 145 - 150) = 11,

f (the frequency of the median class 145 - 150) = 18,

h (the class size) = 5.

Using the formula, Median $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f} \right) \times h$, we have

$$\text{Median} = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18} \right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03.$$

So, the median height of the girls is 149.03 cm.

This means that the height of about 50% of the girls is less than this height, and 50% are taller than this height.

Example 8 : The median of the following data is 525. Find the values of x and y, if the total frequency is 100.

Class intervals	Frequency
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

ఇపుడు $n = 51$. అందువలన, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$. ఈ పరిశీలన 145 – 150 తరగతిలో ఉంటుంది. అప్పుడు,

l (దిగువ అవధి) = 145,

cf (మధ్యగత తరగతి ముందు తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యం 145 – 150) = 11,

f (మధ్యగత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం 145 – 150) = 18,

h (మధ్యగత తరగతి పొడవు) = 5.

సూత్రమును ఉపయోగించి, మధ్యగతము $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$,

మధ్యగతము $= 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$

$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03.$

అందువలన, బాలికల పొడవుల యొక్క మధ్యగతము 149.03 సెం.మీ.

తరగతిలో 50% మంది బాలికలు 149.03 సెం.మీ. కన్నా తక్కువ పొడవును మరియు మిగిలిన 50% మంది 149.03 సెం.మీ. కన్నా ఎక్కువ పొడవు కలిగి ఉంటారు.

ఉదాహరణ 8 : కింది దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము 525. దత్తాంశంలోని రాశుల మొత్తం 100 అయిన x మరియు y విలువలను కనుక్కోండి.

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

Solution :

Class intervals	Frequency	Cumulative frequency
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

It is given that $n = 100$

So, $76 + x + y = 100$, i.e., $x + y = 24$ (1)

The median is 525, which lies in the class 500 – 600

So, $l = 500$, $f = 20$, $\text{cf} = 36 + x$, $h = 100$

Using the formula : $\text{Median} = l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right)h$, we get

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20}\right) \times 100$$

i.e., $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

i.e., $25 = 70 - 5x$

i.e., $5x = 70 - 25 = 45$

So, $x = 9$

Therefore, from (1), we get $9 + y = 24$

i.e., $y = 15$

సాధన :

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

$n = 100$ గా ఇవ్వబడింది.

అందువలన, $76 + x + y = 100$, అంటే, $x + y = 24$ (1)

మధ్యగతము 525 అనునది 500 – 600 తరగతిలో ఉంటుంది.

కావున, $l = 500$, $f = 20$, $\text{cf} = 36 + x$, $h = 100$

సూత్రమును ఉపయోగించి : మధ్యగతము $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) h,$

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20}\right) \times 100$$

అంటే, $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

అంటే, $25 = 70 - 5x$

అంటే, $5x = 70 - 25 = 45$

కనుక, $x = 9$

కాబట్టి (1) నుండి $9 + y = 24$ అవుతుంది.

అంటే, $y = 15$

Now, that you have studied about all the three measures of central tendency, let us discuss **which measure would be best suited for a particular requirement**.

The mean is the most frequently used measure of central tendency because it takes into account all the observations, and lies between the extremes, i.e., the largest and the smallest observations of the entire data. It also enables us to compare two or more distributions. For example, by comparing the average (mean) results of students of different schools of a particular examination, we can conclude which school has a better performance.

However, extreme values in the data affect the mean. For example, the mean of classes having frequencies more or less the same is a good representative of the data. But, if one class has frequency, say 2, and the five others have frequency 20, 25, 20, 21, 18, then the mean will certainly not reflect the way the data behaves. So, in such cases, the mean is not a good representative of the data.

In problems where individual observations are not important, and we wish to find out a 'typical' observation, the median is more appropriate, e.g., finding the typical productivity rate of workers, average wage in a country, etc. These are situations where extreme values may be there. So, rather than the mean, we take the median as a better measure of central tendency.

In situations which require establishing the most frequent value or most popular item, the mode is the best choice, e.g., to find the most popular T.V. programme being watched, the consumer item in greatest demand, the colour of the vehicle used by most of the people, etc.

Remarks :

1. There is a empirical relationship between the three measures of central tendency :

3 Median = Mode + 2 Mean

2. The median of grouped data with unequal class sizes can also be calculated. However, we shall not discuss it here.

ఇపుడు కేంద్రీయ స్థాన విలువలలోని మూడు ముఖ్యమైన అంశాలను గూర్చి నేర్చుకున్నాము. ప్రత్యేకమైన సందర్భాలలో ఏ కొలత సరైనది అని చర్చిద్దాం.

అంకమధ్యమము (సరాసరి లేదా సగటు) దత్తాంశంలోని అన్ని రాశుల విలువలను, అత్యధిక మరియు అత్యల్ప విలువలు కూడా పరిగణలోనికి తీసుకుంటుంది. కనుక అంకమధ్యమమును అత్యంత విశ్వసనీయమైన కేంద్రీయ స్థాన విలువ అంటారు. దీనిని ఉపయోగించి రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ రాశులు లేక విభజనలను సులభంగా పోల్చవచ్చు. ఉదాహరణకు రెండు పాఠశాలలోని విద్యార్థుల పరీక్షా ఫలితాల సరాసరి (సగటు) కనుగొని పోల్చడం ద్వారా ఏ పాఠశాల సమర్థవంతంగా పనిచేస్తున్నది అని చెప్పవచ్చును.

ఏదేమైనా దత్తాంశములలోని కొన్ని అంత్య విలువలు అంకమధ్యమంపై ఎక్కువ ప్రభావం చూపుతాయి. ఉదాహరణకు పౌన:పున్యాలన్నీ దాదాపు సరిసమానంగా ఉన్న తరగతులతో కూడిన దత్తాంశము యొక్క అంకమధ్యమము ఆ దత్తాంశమునకు సరియైన ప్రాతినిధ్య విలువ అవుతుంది. కానీ ఒక తరగతి పౌనఃపున్యం 2, మిగిలిన పౌన:పున్యాలు 20, 5, 20, 21, 18 అయినపుడు అంకమధ్యమము సరియైన ప్రాతినిధ్య విలువ కాదు.

సమస్యలలో, దత్తాంశంలోని విడివిడి రాశుల విలువలకు ప్రాముఖ్యత లేనపుడు, దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్య విలువను కనుగొనవలసి వచ్చిప్పుడు మధ్యగతం మరింత సరైనది అవుతుంది. ఉదాహరణకు ఒక దేశంలోని అందరు కార్మికుల వేతనములకు ప్రాతినిధ్య విలువ కనుగొనవలసి వచ్చినపుడు మధ్యగతమును తీసుకుంటారు. అవి అంత్యమరాశులు కూడా ఉన్న సందర్భాలు కనుక ఇలాంటి సందర్భాలలో సరాసరి కన్నా మధ్యగతం అనువైన కేంద్రీయ స్థాన విలువగా తీసుకుంటాము.

ఎక్కువ సార్లు పునరావృతమయ్యే బహు ప్రాముఖ్యం గల రాశులను గుర్తించవలసిన సంధర్భాలలో బాహుళకమును కేంద్రీయ స్థాన విలువగా పరిగణిస్తారు. ఉదాహరణకు ఎక్కువ మంది వీక్షించే టెలివిజన్ ప్రోగ్రామ్ కనుగొనుటకు, ఎక్కువ అమ్మకము గల వస్తువు కనుగొనుటకు, ఎక్కువ మంది ఉపయోగించు వాహనము రంగు మొదలగు వాటిని కనుక్కోవడానికి బాహుళకంను ఉపయోగిస్తారు.

సూచనలు :

1. కేంద్రీయ స్థాన విలువలైన మూడింటి మధ్య అవినాభావ సంబంధం ఉంది:

3 మధ్యగతము = బాహుళకము + 2 సగటు

2. తరగతి అంతరం వేర్వేరుగా ఉండే వర్గీకృత దత్తాంశాలకు కూడా మధ్యగతము కనుగొనవచ్చును. అయితే ఇప్పుడు మనం దానిని చర్చించడం లేదు.

EXERCISE 13.3

1. The following frequency distribution gives the monthly consumption of electricity of 68 consumers of a locality. Find the median, mean and mode of the data and compare them.

Monthly consumption (in units)	Number of consumers
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. If the median of the distribution given below is 28.5, find the values of x and y.

Class interval	Frequency
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
Total	60

3. A life insurance agent found the following data for distribution of ages of 100 policy holders. Calculate the median age, if policies are given only to persons having age 18 years onwards but less than 60 year.

అభ్యాసం 13.3

1. ఒక ఆవాస ప్రాంతములోని 68 మంది వినియోగదారుల యొక్క నెలసరి విద్యుత్ వినియోగం యొక్క పౌనఃపున్య విభాజన క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. దత్తాంశం యొక్క అంకమధ్యమం, మధ్యగతం, బాహుళకములను కనుగొని వాటిని పోల్చండి.

నెలవారి వినియోగం (యూనిట్లలో)	వినియోగదారుల సంఖ్య
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. క్రింద ఇవ్వబడిన విభజన యొక్క మధ్యగతం 28.5 అయిన x మరియు y ల విలువలు కనుక్కోండి.

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
మొత్తం	60

3. ఒక జీవిత భీమా సంస్థ ఉద్యోగి, 100 మంది పాలసీదారుల వయస్సులను బట్టి తయారు చేసిన విభజన పట్టిక క్రింద ఇవ్వబడింది. 18 సంవత్సరముల నుండి 60 సంవత్సరముల కన్నా తక్కువ వయస్సు గల వారికి మాత్రమే పాలసీలు ఇచ్చిన, పాలసీదారుల వయస్సుల మధ్యగతం కనుగొనండి.

Age (in years)	Number of policy holders
Below 20	2
Below 25	6
Below 30	24
Below 35	45
Below 40	78
Below 45	89
Below 50	92
Below 55	98
Below 60	100

4. The lengths of 40 leaves of a plant are measured correct to the nearest millimetre, and the data obtained is represented in the following table :

Length (in mm)	Number of leaves
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

Find the median length of the leaves.

(**Hint :** The data needs to be converted to continuous classes for finding the median, since the formula assumes continuous classes. The classes then change to 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . ., 171.5 - 180.5.)

వయస్సు (సం॥ లలో)	పాలసీదారుల సంఖ్య
20 కంటే తక్కువ	2
25 కంటే తక్కువ	6
30 కంటే తక్కువ	24
35 కంటే తక్కువ	45
40 కంటే తక్కువ	78
45 కంటే తక్కువ	89
50 కంటే తక్కువ	92
55 కంటే తక్కువ	98
60 కంటే తక్కువ	100

4. ఒక చెట్టు యొక్క 40 ఆకుల పొడవులు దగ్గర మి.మీ. వరకు సరిచేసి కొలిచి మరియు వచ్చిన దత్తాంశమును క్రింది పట్టికలో చూపబడింది:

పొడవు (మి.మీ. లలో)	ఆకుల సంఖ్య
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

ఆకుల యొక్క పొడవుల మధ్యగతము కనుగొనండి.

(**సూచన :** మధ్యగతమును కనుగొనుటకు దత్తాంశమును నిరంతర తరగతులుగా మార్చుకోవలసిన అవసరం ఉంది ఎందుకంటే సూత్రములో నిరంతర తరగతులుగా తీసుకుంటాము. అపుడు తరగతులు 117.5 – 126.5, 126.5 – 135.5 .... 171.5 – 180.5 గా మారుతాయి.)

5. The following table gives the distribution of the life time of 400 neon lamps :

Life time (in hours)	Number of lamps
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

Find the median life time of a lamp.

6. 100 surnames were randomly picked up from a local telephone directory and the frequency distribution of the number of letters in the English alphabets in the surnames was obtained as follows:

Number of letters	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
Number of surnames	6	30	40	16	4	4

Determine the median number of letters in the surnames. Find the mean number of letters in the surnames? Also, find the modal size of the surnames.

7. The distribution below gives the weights of 30 students of a class. Find the median weight of the students.

Weight (in kg)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
No. of students	2	3	8	6	6	3	2

13.5 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. The mean for grouped data can be found by :

(i) the direct method : $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) the assumed mean method : $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

5. ఈ క్రింది పట్టిక 400 నియాన్ బల్బుల జీవితకాలం యొక్క విభజన ఇవ్వబడినది:

జీవిత కాలం (గంటలలో)	బల్బుల సంఖ్య
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

బల్బుల జీవితకాలములకు మధ్యగతము కనుగొనండి.

6. లోకల్ టెలిఫోన్ డైరెక్టరీ నుండి యాదృచ్ఛికంగా 100 ఇంటి పేర్లను తీసుకున్నారు మరియు వాటిలో ఇంగ్లీష్ అక్షరాల క్రమంలో అక్షరాల సంఖ్యను క్రింది విధంగా పౌనఃపున్య విభాజనము తయారు చేయబడింది:

అక్షరాల సంఖ్య	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
ఇంటిపేర్ల సంఖ్య	6	30	40	16	4	4

ఇంటి పేర్లలో గల అక్షరాల యొక్క మధ్యగతమును గుర్తించండి. ఇంటి పేర్లలో గల అక్షరాల యొక్క సగటును కనుగొనుము. ఇంటి పేర్ల యొక్క బాహుళకమును కూడా కనుగొనుము.

7. క్రింది విభజన పట్టికలో ఒక తరగతి యొక్క 30 మంది విద్యార్థుల బరువులు ఇవ్వబడ్డాయి. విద్యార్థుల బరువుల మధ్యగతము కనుగొనండి.

బరువు (కి.గ్రా. లలో)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	8	6	6	3	2

13.5 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు కింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు:

1. వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క అంకమధ్యమం లెక్కించడానికి:

(i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి : $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) విచలన పద్ధతి ఊహించిన సగటు పద్ధతి : $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) the step deviation method : $\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$,

with the assumption that the frequency of a class is centred at its mid-point, called its class mark.

2. The mode for grouped data can be found by using the formula:

$$\text{Mode} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

where symbols have their usual meanings.

3. The cumulative frequency of a class is the frequency obtained by adding the frequencies of all the classes preceding the given class.

4. The median for grouped data is formed by using the formula:

$$\text{Median} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h,$$

where symbols have their usual meanings.

A NOTE TO THE READER

For calculating mode and median for grouped data, it should be ensured that the class intervals are continuous before applying the formulae. Same condition also apply for construction of an ogive. Further, in case of ogives, the scale may not be the same on both the axes.

(iii) సోపాన విచలన పద్ధతి : $\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$,

తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం దాని మధ్యబిందువు వద్ద కేంద్రీకృతమైనదని ఊహించబడినది దానిని తరగతి మధ్యబిందువు అంటారు.

2. వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క బాహుళకమును కనుగొను సూత్రము:

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

ఇక్కడున్న ప్రతి గుర్తుకు వాటికి అనుగుణంగా అర్థం కలిగివున్నాయి.

3. సంచిత పౌనఃపున్యము కనుగొనడానికి, ఆ తరగతి పౌన:పున్యానికి ముందు తరగతుల పౌన:పున్యాన్ని కలుపుతూ వచ్చేవి.

4. వర్గీకృత దత్తాంశంనకు మధ్యగతము కనుగొను సూత్రము:

$$\text{మధ్యగతము} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h,$$

ఇక్కడ సంకేతాలు వాటి సామాన్య అర్థాలను కలిగివున్నాయి.

పాఠకులకు ఒక గమనిక

వర్గీకృత దత్తాంశాల బాహుళకము మరియు మధ్యగతము కనుగొనేటపుడు తరగతి అంతరాలు నిరంతరంగా ఉన్నాయా అని సూత్రాన్ని ఉపయోగించే ముందు నిర్ధారించుకోవాలి. ఇదే విధంగా ఓజీవ్ వక్రాలను గీసేటప్పుడు కూడా చూసుకోవాలి. ఓజీవ్ గీసేటప్పుడు స్కేలు రెండు అక్షాలపైన సమానంగా లేకుండా కూడా ఉండవచ్చు.

1062CH15

PROBABILITY 14

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

– R.S. Woodward

14.1 Probability — A Theoretical Approach

Let us consider the following situation :

Suppose a coin is tossed *at random*.

When we speak of a coin, we assume it to be 'fair', that is, it is symmetrical so that there is no reason for it to come down more often on one side than the other. We call this property of the coin as being 'unbiased'. By the phrase 'random toss', we mean that the coin is allowed to fall freely without any *bias* or *interference*.

We know, in advance, that the coin can only land in one of two possible ways — either head up or tail up (we dismiss the possibility of its 'landing' on its edge, which may be possible, for example, if it falls on sand). We can reasonably assume that each outcome, head or tail, is *as likely to occur as the other.* We refer to this by saying that *the outcomes* head and tail, *are equally likely*.

For another example of equally likely outcomes, suppose we throw a die once. For us, a die will always mean a fair die. What are the possible outcomes? They are 1, 2, 3, 4, 5, 6. Each number has the same possibility of showing up. So the *equally likely outcomes* of throwing a die are 1, 2, 3, 4, 5 and 6.

1062CH15

సంభావ్యత 14

సంభావ్యతల సిద్ధాంతం మరియు దోషాల సిద్ధాంతాలు ఇప్పుడు అధిక గణిత ఆసక్తి మరియు ఎక్కువ ఆచరణాత్మక ప్రాముఖ్యత కలిగించుటలో బలీయమైన బంధాన్ని ఏర్పరుస్తున్నాయి.

— ఆర్.ఎస్. ఉడ్వర్డ్

14.1 సంభావ్యత – ఒక సైద్ధాంతిక విధానం

ఈ క్రింది సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం:

ఒక నాణెం *యాదృచ్ఛికంగా* ఎగురవేయబడిందనుకుందాం.

మనం ఒక నాణెం గురించి మాట్లాడేటప్పుడు, అది 'సరయినది' గా భావిస్తాము, అనగా అది సౌష్టవంగా ఉండాలి, అందువల్ల అది ఒకవైపు (బొమ్మ) కంటే మరొకవైపు (బొరుసు) ఎక్కువగా పడుటకు ఎటువంటి అవకాశం ఉండకూడదు. నాణెం యొక్క ఈ లక్షణాన్ని మనం 'నిష్పక్షపాతం' అని పిలుస్తాము. 'యాదృచ్ఛికం' అనే పదం ద్వారా, నాణెం ఎటువంటి పక్షపాతం లేదా ఇతరజోక్యం లేకుండా స్వేచ్ఛగా ఎగురవేయబడుతుంది అనే అర్థాన్ని తెలియజేస్తాం.

మనకు ముందే తెలిసినట్లుగా ఒక నాణాన్ని ఎగురవేసినపుడు రెండు అవకాశాలు మాత్రమే ఉంటాయి. అవి బొమ్మ లేదా బొరుసు పడటం. (ఇచ్చట మనం నాణెం నిలువుగా పడే అవకాశం ఉన్నప్పటికీ, ఆ సందర్భాన్ని పరిగణనలోనికి తీసుకోం. ఉదాహరణకు, ఇసుకపై నాణెం పడుట). ప్రతీ పర్యవసానంలో బొమ్మ లేదా బొరుసు పడుటకు దాదాపుగా సమాన అవకాశం ఉంటుందని భావిస్తాం. దీనినే మనం 'సమ సంభవ పర్యవసానాలు' అని అంటారు.

సమ సంభావ్యతలకు పర్యవసానానికి మరొక ఉదాహరణ కోసం, మనం ఒక పాచికను ఒకసారి ఎగుర వేశామనుకుందాం. మనకు, పాచిక అంటే ఎల్లప్పుడూ నిష్పక్షపాతమైన అని అర్థం. అప్పుడు సంభవించే పర్యవసానాలు ఏమి? అవి 1, 2, 3, 4, 5, 6. ఒక్కో సంఖ్యకు ఒకే సమాన అవకాశం ఉంటుంది. కాబట్టి పాచికలు ఎగురవేసినపుడు అన్ని పర్యవసానాలు 1, 2, 3, 4, 5, 6 లు సమ సంభవాలే.

Are the outcomes of every experiment equally likely? Let us see.

Suppose that a bag contains 4 red balls and 1 blue ball, and you draw a ball without looking into the bag. What are the outcomes? Are the outcomes — a red ball and a blue ball equally likely? Since there are 4 red balls and only one blue ball, you would agree that you are more likely to get a red ball than a blue ball. So, the outcomes (a red ball or a blue ball) are *not* equally likely. However, the outcome of drawing a ball of any colour from the bag is equally likely. So, all experiments do not necessarily have equally likely outcomes.

However, in this chapter, from now on, we will **assume that all the experiments have equally likely outcomes.**

In Class IX, we defined the experimental or empirical probability P(E) of an event E as

$$P(E) = \frac{\text{Number of trials in which the event happened}}{\text{Total number of trials}}$$

The empirical interpretation of probability can be applied to every event associated with an experiment which can be repeated a large number of times. The requirement of repeating an experiment has some limitations, as it may be very expensive or unfeasible in many situations. Of course, it worked well in coin tossing or die throwing experiments. But how about repeating the experiment of launching a satellite in order to compute the empirical probability of its failure during launching, or the repetition of the phenomenon of an earthquake to compute the empirical probability of a multi-storeyed building getting destroyed in an earthquake?

In experiments where we are prepared to make certain assumptions, the repetition of an experiment can be avoided, as the assumptions help in directly calculating the exact (theoretical) probability. The assumption of equally likely outcomes (which is valid in many experiments, as in the two examples above, of a coin and of a die) is one such assumption that leads us to the following definition of probability of an event.

The **theoretical probability** (also called **classical probability**) of an event E, written as P(E), is defined as

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\textbf{Number of outcomes favourable to E}}{\textbf{Number of all possible outcomes of the experiment}},$$

where we assume that the outcomes of the experiment are *equally likely*.

We will briefly refer to theoretical probability as probability.

This definition of probability was given by Pierre Simon Laplace in 1795.

ప్రతి ప్రయోగం యొక్క ఫలితాలు సమసంభవాలేనా? మనం పరిశీలిద్దాం.

ఒక సంచిలో 4 ఎరుపు బంతులు మరియు 1 నీలం బంతి ఉన్నాయని అనుకుందాం, ఇంకా మీరు సంచిలోకి చూడకుండా ఒక బంతిని తీసారనుకుంటే, దాని పర్యవసానాలు ఏమిటి? – ఎరుపు బంతి మరియు నీలం బంతి వచ్చుటకు సమాన అవకాశాలు ఉన్నాయా? 4 ఎరుపు బంతులు మరియు ఒక నీలం బంతి మాత్రమే ఉన్నందున, నీలం బంతి కంటే ఎరుపు బంతి వచ్చే అవకాశం ఎక్కువగా ఉందని మీరు అంగీకరిస్తారు. కాబట్టి, ఫలితాలు (ఎరుపు బంతి లేదా నీలం బంతి) సమసంభవాలు కావు. ఏదేమైనా, సంచి నుండి ఏదైనా రంగు బంతిని తీయడంలో ఫలితం మాత్రం సమసంభవంగా ఉంటుంది. కాబట్టి, అన్ని ప్రయోగాలు సమసంభవ ఫలితాలను కలిగి ఉండవు.

ఏదేమైనా, ఈ అధ్యాయంలో, ఇకనుండి, **అన్ని ప్రయోగాలు సమసంభవాలని మనం భావిస్తాము**.

తొమ్మిదవ తరగతిలో, ఘటన E యొక్క ప్రయోగాత్మక లేదా అనుభవపూర్వక సంభావ్యత P(E)ని మనం ఇలా నిర్వచించాం.

$$P(E) = \frac{\text{ఘటన జరుగుటకు అనుకూల ప్రయోగాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం ప్రయోగాల సంఖ్య}}$$

సంభావ్యత యొక్క అనుభవపూర్వక వివరణను ఏదేని ప్రయోగంతో సంబంధం ఉన్న ప్రతి సంఘటనకు వర్తింపచేయవచ్చును, ఇది ఎక్కువసార్లు పునరావృతమవుతుంది. ఒక ప్రయోగాన్ని పునరావృతం చేయాల్సిన సందర్భాలలో కొన్ని పరిమితులు ఉన్నాయి, ఎందుకంటే ఇది చాలా ఖరీదైనది కానీ లేదా చాలా సందర్భాల్లో సాధ్యం కానిది కానీ అయి ఉండవచ్చు. అయితే నాణేన్ని ఎగరవేయడం లేదా పాచిక దొర్లించటం వంటి ప్రయోగాలలో ఇది సాధ్యమే. కానీ అదే ఒక కృత్రిమ ఉపగ్రహాన్ని ప్రయోగించే ప్రయోగ సమయంలో విఫలమైన ప్రాయోగిక సంభావ్యతను లెక్కించడానికి ప్రయోగాన్ని పునరావృతం చేయడం లేదా భూకంపంలో బహుళ అంతస్తుల భవనం ధ్వంసమయ్యే ప్రాయోగిక సంభావ్యతను లెక్కించడానికి భూకంపం యొక్క దృగ్విషయాన్ని పునరావృతం చేయడం ఎలా?

అధిక పర్యాయములు నిర్వహించిన ప్రతీ ప్రయోగంలోని ప్రతీ ఘటన యొక్క సంభావ్యతకు ఈ ప్రాయోగిక సంభావ్యత ఫలితాన్ని వర్తింపజేయవచ్చును. ప్రయోగాలను పునరావృతం చేయనవసరం లేకుండా చేయుటకు ఆ ప్రయోగాల్లో మనం ఏవైతే పరికల్పనలు తయారు చేసుకుంటామో, ఆ పరికల్పనలు ఖచ్చితమైన (సైద్ధాంతిక) సంభావ్యతను లెక్కించుటకు ఉపయోగపడతాయి. సమసంభవ పర్యవసానాల పరికల్పనకు (పైన చెప్పుకున్న నాణెం మరియు పాచికల ఉదాహణల వంటి అనేక ప్రయోగాలలో సత్యమైన) సమ సంభవ పర్యవసానాల పరికల్పన ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత యొక్క క్రింది నిర్వచనానికి దారి తీస్తుంది.

P(E) గా వ్రాయబడిన ఒక సంఘటన E యొక్క **సైద్ధాంతిక సంభావ్యత (సాంప్రదాయక సంభావ్యత** అని కూడా పిలుస్తారు) ఇలా నిర్వచించబడింది.

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\text{E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{ప్రయోగం యొక్క మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}},$$

ఇక్కడ ప్రయోగం యొక్క ఫలితాలు *సమ సంభవములుగా* ఉంటాయని మనం భావిస్తాం.

సాధారణంగా, 'సైద్ధాంతిక సంభావ్యత'నే మనం "సంభావ్యత"గా వ్యవహరిస్తాం.

1795 లో పియరీ సిమ్సన్ లాప్లేస్ సంభావ్యతకు ఈ నిర్వచనాన్ని ఇచ్చారు.

Probability theory had its origin in the 16th century when an Italian physician and mathematician J.Cardan wrote the first book on the subject, *The Book on Games of Chance.* Since its inception, the study of probability has attracted the attention of great mathematicians. James Bernoulli (1654 – 1705), A. de Moivre (1667 – 1754), and Pierre Simon Laplace are among those who made significant contributions to this field. Laplace's *Theorie Analytique des Probabilités,* 1812, is considered to be the greatest contribution by a single person to the theory of probability. In recent years, probability has been used extensively in many areas such as biology, economics, genetics, physics, sociology etc.

Pierre Simon Laplace (1749 – 1827)

Let us find the probability for some of the events associated with experiments where the equally likely assumption holds.

Example 1 : Find the probability of getting a head when a coin is tossed once. Also find the probability of getting a tail.

Solution : In the experiment of tossing a coin once, the number of possible outcomes is two — Head (H) and Tail (T). Let E be the event 'getting a head'. The number of outcomes favourable to E, (i.e., of getting a head) is 1. Therefore,

$$P(E) = P\ (\text{head}) = \frac{\text{Number of outcomes favourable to E}}{\text{Number of all possible outcomes}} = \frac{1}{2}$$

Similarly, if F is the event 'getting a tail', then

$$P(F) = P(\text{tail}) = \frac{1}{2} \quad (\text{Why ?})$$

Example 2 : A bag contains a red ball, a blue ball and a yellow ball, all the balls being of the same size. Kritika takes out a ball from the bag without looking into it. What is the probability that she takes out the

(i) yellow ball? (ii) red ball? (iii) blue ball?

Solution : Kritika takes out a ball from the bag without looking into it. So, it is equally likely that she takes out any one of them.

సంభావ్యత సిద్ధాంతం 16 వ శతాబ్దంలో ఇటాలియన్ వైద్యుడు మరియు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు జె.కార్డాన్ ఈ అంశంపై మొదటి పుస్తకం *"ది బుక్ ఆన్ గేమ్స్ ఆఫ్ చాన్స్"* వ్రాసినప్పుడు ఉద్భవించింది. ప్రారంభం నుండి, సంభావ్యత యొక్క అధ్యయనం గణిత శాస్త్రవేత్తల దృష్టిని ఆకర్షించింది. ఈ రంగానికి గణనీయమైన కృషి చేసిన వారిలో జేమ్స్ బెర్నోలి (1654 – 1705), ఎ. డి. మోవియిర్ (1667 – 1754), మరియు పియరీ సిమ్సన్ లాప్లేస్ ఉన్నారు. 1812లో లాప్లేస్ రాసిన *"థియోరీ అనాలిటిక్డె ప్రొబబిలిటీస్"* అనే గ్రంథం సంభావ్యత సిద్ధాంతానికి ఒక వ్యక్తి చేసిన సేవలలో గొప్పదిగా పరిగణించబడుతుంది. ఇటీవలి కాలంలో, సంభావ్యతను జీవశాస్త్రం, ఆర్థికశాస్త్రం, జన్యుశాస్త్రం, భౌతికశాస్త్రం, సామాజికశాస్త్రం మొదలైన అనేక రంగాలలో విస్తృతంగా ఉపయోగిస్తున్నారు.

పియర్ సిమ్సన్ లాప్లేస్
(1749 – 1827)

ప్రయోగాలతో ముడిపడిన సమసంభవ ఘటనలైన కొన్ని ఘటనల సంభావ్యతలను మనం ఇప్పుడు కనుగొందాం.

ఉదాహరణ 1 : ఒక నాణేన్ని ఒకసారి ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మపడే సంభావ్యతను కనుగొనండి. బొరుసు పడే సంభావ్యతను కూడా కనుగొనండి.

సాధన : ఒక నాణేన్ని ఒకసారి ఎగుర వేసినప్పుడు, ఏర్పడే పర్యవసానాల సంఖ్య రెండు – బొమ్మ (H) మరియు బొరుసు (T). E అనేది 'బొమ్మ పడటం' అనే సంఘటనగా భావించండి. E కు అనుకూలమైన పర్యవసానాల సంఖ్య, (అనగా, 'బొమ్మ పడటం') 1, కాబట్టి,

$$P(E) = P\,(\text{బొమ్మ}) = \frac{E \text{ కు అనుకూలమైన పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యపడే అన్ని పర్యవసానాల సంఖ్య}} = \frac{1}{2}$$

అదేవిధంగా, F అనేది 'బొరుసు పడటం' అనే సంఘటన అయితే, అప్పుడు

$$P(F) = P(\text{బొరుసు}) = \frac{1}{2} \quad (\text{ఎందుకు?})$$

ఉదాహరణ 2 : ఒక సంచిలో ఎరుపు బంతి, నీలం బంతి మరియు పసుపు రంగు బంతి ఉన్నాయి. అన్ని బంతులు ఒకే పరిమాణంలో ఉన్నాయి. కృతిక సంచిలోకి చూడకుండా, ఆ సంచి నుండి ఒక బంతిని బయటకు తీస్తే, ఆ బంతి

(i) పసుపుబంతి? (ii) ఎరుపుబంతి? (iii) నీలిబంతి? అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : కృతిక సంచిలోకి చూడకుండా ఒక బంతిని బయటకు తీసింది. కాబట్టి, ఆమె వాటిలో దేనినైనా బయటకు తీసే పర్యవసానాలు సమసంభవాలు.

Let Y be the event 'the ball taken out is yellow', B be the event 'the ball taken out is blue', and R be the event 'the ball taken out is red'.

Now, the number of possible outcomes = 3.

(i) The number of outcomes favourable to the event Y = 1.

So, $P(Y) = \frac{1}{3}$

Similarly,(ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ and (iii) $P(B) = \frac{1}{3}\cdot$

Remarks :

1. An event having only one outcome of the experiment is called an *elementary event.* In Example 1, both the events E and F are elementary events. Similarly, in Example 2, all the three events, Y, B and R are elementary events.

2. In Example 1, we note that : $P(E) + P(F) = 1$

In Example 2, we note that : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

Observe that **the sum of the probabilities of all the elementary events of an experiment** is 1. This is true in general also.

Example 3 : Suppose we throw a die once. (i) What is the probability of getting a number greater than 4 ? (ii) What is the probability of getting a number less than or equal to 4 ?

Solution : (i) Here, let E be the event 'getting a number greater than 4'. The number of possible outcomes is six : 1, 2, 3, 4, 5 and 6, and the outcomes favourable to E are 5 and 6. Therefore, the number of outcomes favourable to E is 2. So,

$$P(E) = P(\text{number greater than 4}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) Let F be the event 'getting a number less than or equal to 4'.

Number of possible outcomes = 6

Outcomes favourable to the event F are 1, 2, 3, 4.

So, the number of outcomes favourable to F is 4.

Therefore, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Y అనేది 'బయటకు తీసిన బంతి పసుపు రంగులో ఉండు ఘటన', B అనేది 'బయటకు తీసిన బంతి నీలం రంగులో ఉండు ఘటన", మరియు R అనేది 'బయటకు తీసిన బంతి ఎరుపు రంగులో ఉండు ఘటన" అనుకొనుము.

ఇప్పుడు, మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 3.

(i) సంఘటన Y కు అనుకూలమైన పర్యవసానాల సంఖ్య = 1.

కనుక, $P(Y) = \frac{1}{3}$

అదేవిధంగా, (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ మరియు (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$.

సూచనలు :

1. ఒక ప్రయోగంలో ఒక ఘటనకు అనుకూల పర్యవసానం ఒక్కటి మాత్రమే అయిన దానిని 'ప్రాథమిక ఘటన' అంటారు. ఉదాహరణ 1లో, E మరియు F లు రెండూ ప్రాథమిక ఘటనలు. అదేవిధంగా, ఉదాహరణ 2లో, Y, B మరియు R అనే మూడూ ప్రాథమిక ఘటనలు.

2. ఉదాహరణ 1లో, మనం గమనించేదేమిటంటే: $P(E) + P(F) = 1$

ఉదాహరణ 2 లో, మనం గమనించేదేమిటంటే: $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

ఒక ప్రయోగం **యొక్క అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం 1అని** గమనించండి. సాధారణంగా ఇది ఎల్లప్పుడూ సత్యం.

ఉదాహరణ 3 : ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు. (i) 4 కంటే పెద్ద సంఖ్యను పొందే సంభావ్యత ఎంత? (ii) 4 కంటే చిన్నది లేదా సమానమైన సంఖ్యను పొందే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : (i) ఇక్కడ, E అనేది '4 కంటే ఎక్కువ సంఖ్యను పొందడం' అనే ఘటనగా భావించండి. మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య ఆరు : 1, 2, 3, 4, 5, 6 మరియు E కు అనుకూలమైన పర్యవసానాలు 5 మరియు 6. అందువల్ల, E కు అనుకూలమైన పర్యవసానాల సంఖ్య 2. కనుక,

$$P(E) = P(4 \text{ కంటే పెద్ద సంఖ్య}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) F అనేది '4 కంటే చిన్నది లేదా సమానమైన సంఖ్యను పొందడం' అనే ఘటనగా భావించండి.

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 6

ఘటన F కుఅనుకూలమైన పర్యవసానాలు 1, 2, 3, 4.

కాబట్టి, F కుఅనుకూలమైన పర్యవసానాల సంఖ్య 4.

కాబట్టి, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Are the events E and F in the example above elementary events? No, they are **not** because the event E has 2 outcomes and the event F has 4 outcomes.

Remarks : From Example 1, we note that

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

where E is the event 'getting a head' and F is the event 'getting a tail'.

From (i) and (ii) of Example 3, we also get

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

where E is the event 'getting a number >4' and F is the event 'getting a number ≤ 4'.

Note that getting a number *not* greater than 4 is same as getting a number less than or equal to 4, and vice versa.

In (1) and (2) above, is F not the same as 'not E'? Yes, it is. We denote the event 'not E' by $\overline{E}$.

So, $\quad P(E) + P(\text{not } E) = 1$

i.e., $\quad P(E) + P(\overline{E}) = 1$, which gives us $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

In general, it is true that for an event E,

$$\mathbf{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$$

The event $\overline{E}$, representing 'not E', is called the **complement** of the event E. We also say that E and $\overline{E}$ are **complementary** events.

Before proceeding further, let us try to find the answers to the following questions:

(i) What is the probability of getting a number 8 in a single throw of a die?

(ii) What is the probability of getting a number less than 7 in a single throw of a die?

Let us answer (i) :

We know that there are only six possible outcomes in a single throw of a die. These outcomes are 1, 2, 3, 4, 5 and 6. Since no face of the die is marked 8, so there is no outcome favourable to 8, i.e., the number of such outcomes is zero. In other words, getting 8 in a single throw of a die, is *impossible*.

So, $\quad P(\text{getting } 8) = \frac{0}{6} = 0$

పై ఉదాహరణలోని E మరియు F సంఘటనలు ప్రాథమిక ఘటనా? కాదు, ఎందుకంటే ఘటన E కు అనుకూల పర్యవసానాలు 2. మరియు ఘటన F కు అనుకూల పర్యవసానాలు 4.

పరిశీలనలు : ఉదాహరణ 1 నుండి, మనం ఈ క్రింది విషయాన్ని గమనించవచ్చు.

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

ఇక్కడ, E అనేది 'బొమ్మను పొందడం' మరియు F అనేది 'బొరుసును పొందడం' అనే ఘటనలు.

ఉదాహరణ 3లోని (i) మరియు (ii) నుండి కూడా

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

ఇక్కడ E అనేది >4' సంఖ్యను పొందడం' మరియు F అనేది ≤ 4' సంఖ్యను పొందడం' అనే ఘటనలు.

4 కంటే పెద్ద సంఖ్యను పొందడం అనేది, 4 కంటే చిన్న లేదా సమానమైన సంఖ్యను పొందడంతో సమానం అని గమనించండి. మరియు దాని విపర్యయం కూడా సత్యం అని గమనించవచ్చు.

పైన (1), (2) ల నుండి, F అనేది 'E కాదు'తో సమానమే కదా? అవును. 'E కాదు' అనే సంఘటనను $\bar{E}$ తో సూచిస్తాము.

కనుక, P(E) + P(E కానిది) = 1

అనగా, $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, దీని నుండి $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

సాధారణంగా, ఒక ఘటన **E** కు,

$$\mathbf{P(\bar{E}) = 1 - P(E)}$$

'E కానిది' కు ప్రాతినిధ్యం వహించే ఘటన $\bar{E}$ ని ఘటన E యొక్క **పూరకంగా** పిలుస్తారు. E మరియు $\bar{E}$ లను **పూరక** సంఘటనలు అని కూడా అంటాం.

మరింత ముందుకు కొనసాగడానికి ముందు, ఈ కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలను కనుగొనడానికి ప్రయత్నిద్దాం:

(i) ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినపుడు సంఖ్య 8 ను పొందే సంభావ్యత ఎంత?

(ii) ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినపుడు 7 కంటే తక్కువ సంఖ్యను పొందే సంభావ్యత ఎంత?

(i)కు సమాధానంచెబుదాం :

ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు ఆరు పర్యవసానములు మాత్రమే ఉంటాయని మనకు తెలుసు. ఈ పర్యవసానములు 1, 2, 3, 4, 5, 6. పాచిక యొక్క ఏ ముఖం 8 ను కలిగి ఉండదు కాబట్టి, 8 పడుటకు అనుకూల పర్యవసానము ఉండదు. అంటే, అటువంటి పర్యవసానముల సంఖ్య సున్న. మరోమాటలోచెప్పాలంటే, ఒక పాచిక దొర్లించటంలో 8 పడటం అసాధ్యం.

కనుక, P (8 ను పొందుట) = $\frac{0}{6} = 0$

That is, the probability of an event which is *impossible* to occur is 0. Such an event is called an **impossible event**.

Let us answer (ii) :

Since every face of a die is marked with a number less than 7, it is *sure* that we will always get a number less than 7 when it is thrown once. So, the number of favourable outcomes is the same as the number of all possible outcomes, which is 6.

Therefore, $\quad P(E) = P(\text{getting a number less than 7}) = \frac{6}{6} = 1$

So, the probability of an event which is *sure* (or *certain*) to occur is 1. Such an event is called a **sure event** or a **certain event**.

Note : From the definition of the probability P(E), we see that the numerator (number of outcomes favourable to the event E) is always less than or equal to the denominator (the number of all possible outcomes). Therefore,

$$\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$$

Now, let us take an example related to playing cards. Have you seen a deck of playing cards? It consists of 52 cards which are divided into 4 suits of 13 cards each— spades (♠), hearts (♥), diamonds (♦) and clubs (♣). Clubs and spades are of black colour, while hearts and diamonds are of red colour. The cards in each suit are ace, king, queen, jack, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 and 2. Kings, queens and jacks are called *face cards*.

Example 4 : One card is drawn from a well-shuffled deck of 52 cards. Calculate the probability that the card will

(i) be an ace,

(ii) not be an ace.

Solution : Well-shuffling ensures *equally likely* outcomes.

(i) There are 4 aces in a deck. Let E be the event 'the card is an ace'.

The number of outcomes favourable to E = 4

The number of possible outcomes = 52 (Why ?)

Therefore, $\quad P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) Let F be the event 'card drawn is not an ace'.

The number of outcomes favourable to the event F = 52 – 4 = 48 (Why?)

అంటే, అసాధ్యమైన ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0. అటువంటి ఘటనను **అసాధ్య ఘటన** అంటారు.

(ii) కు సమాధానంచెబుదాం:

ఒక పాచిక యొక్క ప్రతీ ముఖంపై 7 కంటే తక్కువ సంఖ్య ఉంటుంది కాబట్టి, దానిని ఒకసారి విసిరినప్పుడు మనకు ఎల్లప్పుడూ 7 కంటే తక్కువ సంఖ్య లభిస్తుంది. కాబట్టి, అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య మొత్తం పర్యవసనాల సంఖ్య 6కు సమానం.

అందువల్ల, $P(E) = P(7 \text{ కంటే తక్కువ సంఖ్యను పొందడం}) = \frac{6}{6} = 1$

కాబట్టి, నిర్ధిష్టంగా (లేదా ఖచ్చితంగా) సంభవించే ఘటన యొక్క సంభావ్యత. అటువంటి ఘటనను **ఖచ్చిత ఘటన** లేదా **నిర్దిష్ట ఘటన** అంటారు.

గమనిక : సంభావ్యత P(E), యొక్క నిర్వచనం నుండి, లవం (ఘటన Eకు అనుకూలమైన పర్యవసానాల సంఖ్య) ఎల్లప్పుడూ, హారం (సాధ్యమయ్యే అన్ని పర్యవసానాల సంఖ్య) కంటే తక్కువగా లేదా సమానంగా ఉంటుందని మనం గమనిస్తాము. కాబట్టి,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

ఇప్పుడు, పేక కట్టకు సంబంధించిన ఒక ఉదాహరణ తీసుకుందాం. మీరు ఎప్పుడైనా పేక ముక్కలను చూసారా? ఇందులో 52 కార్డులను 13 కార్డుల చొప్పున 4 విభాగాలు ఉంటాయి. అవి — స్పేడ్‌లు (♠), హృదయం గుర్తులు (♥), డైమండ్‌లు (♦) మరియు కళావర్‌లు (♣). కళావర్‌లు మరియు స్పేడ్లు నలుపు రంగులో ఉంటాయి, హృదయం గుర్తులు మరియు డైమండ్‌లు ఎరుపు రంగులో ఉంటాయి. ఒక్కొక్క విభాగంలో ఏస్, రాజు, రాణి, జాకీ, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 అనే కార్డులు ఉంటాయి. రాజులు, రాణులు, జాకీలను **ముఖ కార్డులు** అంటారు.

ఉదాహరణ 4 : బాగుగా కలుపబడిన పేకాట కార్డుల కట్టలో 52 కార్డుల నుండి ఒక్క కార్డు తీయుటలో అది

(i) ఏస్ కార్డు అగుటకు,

(ii) ఏస్ కాక పోవుటకు సంభావ్యతలను లెక్కించండి.

సాధన : బాగుగా కలుపుట వలన, పర్యవసానాలన్నీ **సమసంభవములు** అవుతాయి. సమానంగా ఫలితాలు వస్తాయి.

(i) ఒక కట్టలో 4 ఏస్‌లు ఉంటాయి. E అనేది తీసిన కార్డు 'ఏస్ అగుట' అనే ఘటన అనుకుందాం.

'కార్డు ఒక ఏస్' E కు అనుకూల పర్యవసానాల ఫలితాల సంఖ్య E = 4

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 52 (ఎందుకు ?)

కాబట్టి, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) F అనేది 'తీసిన కార్డు ఏస్ కాదు అనే ఘటన' అనుకుంటే

సంఘటన Fకు అనుకూలమైన పర్యవసానాల సంఖ్య = 52 – 4 = 48 (ఎందుకు?)

The number of possible outcomes = 52

Therefore, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

Remark : Note that F is nothing but $\overline{E}$. Therefore, we can also calculate P(F) as follows: P(F) $= P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$.

Example 5 : Two players, Sangeeta and Reshma, play a tennis match. It is known that the probability of Sangeeta winning the match is 0.62. What is the probability of Reshma winning the match?

Solution : Let S and R denote the events that Sangeeta wins the match and Reshma wins the match, respectively.

The probability of Sangeeta's winning = P(S) = 0.62 (given)

The probability of Reshma's winning = P(R) = 1 – P(S)

[As the events R and S are complementary]

= 1 – 0.62 = 0.38

Example 6 : Savita and Hamida are friends. What is the probability that both will have (i) different birthdays? (ii) the same birthday? (ignoring a leap year).

Solution : Out of the two friends, one girl, say, Savita's birthday can be any day of the year. Now, Hamida's birthday can also be any day of 365 days in the year.

We assume that these 365 outcomes are equally likely.

(i) If Hamida's birthday is different from Savita's, the number of favourable outcomes for her birthday is 365 – 1 = 364

So, P (Hamida's birthday is different from Savita's birthday) $= \frac{364}{365}$

(ii) P(Savita and Hamida have the same birthday)

= 1 – P (both have different birthdays)

$= 1 - \frac{364}{365}$ [Using $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$]

$= \frac{1}{365}$

మొత్తం పర్యవసానాలు = 52

కావున, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

వ్యాఖ్య : ఘటన F అనేది $\bar{E}$ తప్ప మరేమీకాదు అని గమనించండి. అందువల్ల, మనం P(F) ని ఇలా కూడా లెక్కించవచ్చు.

$$P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}.$$

ఉదాహరణ 5 : సంగీత, రేష్మాలు టెన్నిస్ ఆటను ఆడతున్నారు. సంగీత గెలిచే సంభావ్యత 0.62గా ఉన్నట్లయితే, రేష్మా గెలిచే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : సంగీత, రేష్మా లు ఆటను గెలిచే ఘటనలను వరుసగా S, R సూచిస్తాయి అనుకుందాం.

సంగీత గెలిచే సంభావ్యత = P(S) = 0.62 (దత్తాంశం)

రేష్మా గెలిచే అవకాశం = P(R) = 1 – P(S)

[R, S లు పూరక ఘటనలు అగుటవలన]

$$= 1 - 0.62 = 0.38$$

ఉదాహరణ 6 : సవిత, హమీదాలు స్నేహితులు. వారిద్దరి పుట్టిన రోజులు (i) వేర్వేరు రోజులుగా రావడానికి, (ii) ఒకే రోజు రావడానికి సంభావ్యతలు ఎంత? (లీప్ సంవత్సరం కాదు).

సాధన : ఇద్దరు స్నేహితుల్లో ఒక అమ్మాయి, సవిత పుట్టిన రోజు సంవత్సరంలో ఏ రోజైనా కావచ్చు. ఇప్పుడు హమీదా పుట్టిన రోజు కూడా సంవత్సరంలో 365 రోజుల్లో ఏదైనా కావచ్చును.

కావున ఈ 365 పర్యవసానాలు సమసంభవములని మనము పరిగణించాలి.

(i) హమీదా పుట్టిన రోజు సవిత పుట్టిన రోజుకు భిన్నంగా ఉంటే, ఆమె పుట్టిన రోజుకు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 365 – 1 = 364

కనుక, P (వేర్వేరు పుట్టిన రోజులు) $= \frac{364}{365}$

(ii) P(ఒకేరోజు పుట్టిన రోజు)

$= 1 - P$ (వేర్వేరు పుట్టిన రోజులు)

$= 1 - \frac{364}{365}$ $[\because P(\bar{E}) = 1 - P(E)]$

$= \frac{1}{365}$

Example 7 : There are 40 students in Class X of a school of whom 25 are girls and 15 are boys. The class teacher has to select one student as a class representative. She writes the name of each student on a separate card, the cards being identical. Then she puts cards in a bag and stirs them thoroughly. She then draws one card from the bag. What is the probability that the name written on the card is the name of (i) a girl? (ii) a boy?

Solution : There are 40 students, and only one name card has to be chosen.

(i) The number of all possible outcomes is 40

The number of outcomes favourable for a card with the name of a girl = 25 (Why?)

Therefore, P (card with name of a girl) = P(Girl) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) The number of outcomes favourable for a card with the name of a boy = 15 (Why?)

Therefore, P(card with name of a boy) = P(Boy) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

Note : We can also determine P(Boy), by taking

$$P(\text{Boy}) = 1 - P(\text{not Boy}) = 1 - P(\text{Girl}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Example 8 : A box contains 3 blue, 2 white, and 4 red marbles. If a marble is drawn at *random* from the box, what is the probability that it will be

(i) white? (ii) blue? (iii) red?

Solution : Saying that a marble is drawn at random is a short way of saying that all the marbles are equally likely to be drawn. Therefore, the

number of possible outcomes = 3 +2 + 4 = 9 (Why?)

Let W denote the event 'the marble is white', B denote the event 'the marble is blue' and R denote the event 'marble is red'.

(i) The number of outcomes favourable to the event W = 2

So, $P(W) = \frac{2}{9}$

Similarly, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ and (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

Note that P(W) + P(B) + P(R) = 1.

ఉదాహరణ 7 : ఒక పాఠశాలలో, పదవతరగతిలో మొత్తం 40 మంది విద్యార్థులలో 25 మంది బాలికలు, 15 మంది బాలురు ఉన్నారు. ఉపాధ్యాయురాలు ఒక విద్యార్థిని తరగతి ప్రతినిధిగా ఎంపిక చేయాలి. ఆమె ఒక్కొక్క విద్యార్థి పేరును ఒకేలా కనిపించే ఒక్కొక్క కార్డుపై వేర్వేరుగా వ్రాసారు. తర్వాత ఆ కార్డులను ఒక సంచిలో వేసి బాగా కలిపారు. ఆ సంచి నుండి ఒక కార్డును ఎంపిక చేసిన; ఆ కార్డుపై రాయబడిన పేరు (i) ఒక అమ్మాయి (ii) ఒక అబ్బాయి అగుటకు సంభావ్యతలు లెక్కించండి?

సాధన : 40 మంది విద్యార్థులలో ఒక కార్డును మాత్రమే ఎంచుకోవాలి.

(i) మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 40

అమ్మాయి పేరు గల కార్డు తీయుటకు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 25 (ఎందుకు?)

అందువల్ల, P (అమ్మాయి పేరు గల కార్డు) = P(అమ్మాయి) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) అబ్బాయి పేరు గల కార్డు తీయుటకు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 15 (ఎందుకు?)

అందువల్ల, P(అబ్బాయి పేరు గల కార్డు) = P(అబ్బాయి) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

గమనిక : మనం P (అబ్బాయి)ని ఇలా కూడా లెక్కించవచ్చు.

$$P(\text{అబ్బాయి}) = 1 - P(\text{అబ్బాయి కాదు}) = 1 - P(\text{అమ్మాయి}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

ఉదాహరణ 8 : ఒక పెట్టెలో 3 నీలం, 2 తెలుపు మరియు 4 ఎరుపు గోళీలు ఉన్నాయి. ఒకవేళ ఆ పెట్టెనుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక గోళీని తీసినట్లయితే, అది

(i) తెలుపు (ii) నీలం (iii) ఎరుపు రంగు గోళీ అయ్యే సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

సాధన : యాదృచ్ఛికంగా గోళీలను తీశామని చెప్పడం అంటే, ఏ గోళీ తీయుటకు అయినా సమసంభవ పర్యవసానమే.

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 3 +2 + 4 = 9 (ఎందుకు?)

W అనేది 'తెల్లని గోళీ' తీయు ఘటనను, B అనేది 'నీలం గోళీ' తీయు ఘటనను మరియు R అనేది 'ఎరుపు గోళీ' తీయు ఘటనను సూచిస్తుంది అనుకుందాం.

(i) ఘటన W కు అనుకూలమైన పర్యవసనాల సంఖ్య = 2

కనుక, $P(W) = \frac{2}{9}$

అదేవిధంగా, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ మరియు (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

$P(W) + P(B) + P(R) = 1$ అని గమనించండి.

Example 9 : Harpreet tosses two different coins simultaneously (say, one is of ₹1 and other of ₹ 2). What is the probability that she gets *at least* one head?

Solution : We write H for 'head' and T for 'tail'. When two coins are tossed simultaneously, the possible outcomes are (H, H), (H, T), (T, H), (T, T), which are all *equally likely*. Here (H, H) means head up on the first coin (say on ₹ 1) and head up on the second coin (₹ 2). Similarly (H, T) means head up on the first coin and tail up on the second coin and so on.

The outcomes favourable to the event E, 'at least one head' are (H, H), (H, T) and (T, H). (Why?)

So, the number of outcomes favourable to E is 3.

Therefore, $\quad P(E) = \frac{3}{4}$

i.e., the probability that Harpreet gets at least one head is $\frac{3}{4}$.

Note : You can also find P(E) as follows:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \left(\text{Since } P(\overline{E}) = P(\text{no head}) = \frac{1}{4}\right)$$

Did you observe that in all the examples discussed so far, the number of possible outcomes in each experiment was finite? If not, check it now.

There are many experiments in which the outcome is any number between two given numbers, or in which the outcome is every point within a circle or rectangle, etc. Can you now count the number of all possible outcomes? As you know, this is not possible since there are infinitely many numbers between two given numbers, or there are infinitely many points within a circle. So, the definition of (theoretical) probability which you have learnt so far cannot be applied in the present form. What is the way out? To answer this, let us consider the following example :

Example 10* : In a musical chair game, the person playing the music has been advised to stop playing the music at any time within 2 minutes after she starts playing. What is the probability that the music will stop within the first half-minute after starting?

Solution : Here the possible outcomes are all the numbers between 0 and 2. This is the portion of the number line from 0 to 2 (see Fig. 14.1).

Fig. 14.1

* Not from the examination point of view.

ఉదాహరణ 9 : హర్‌ప్రీత్ ఒకేసారి రెండు వేర్వేరు నాణేలను (ఉదాహరణకు, ఒకటి ₹1 మరియు మరొకటి ₹2) ఎగురవేసిన, ఆమెకు కనీసం ఒక బొమ్మ పడే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : మనం 'బొమ్మ'కు H అని, 'బొరుసు'కు T అని రాద్దాం. రెండు నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు, మొత్తం పర్యవసానాలు (H, H), (H, T), (T, H), (T, T), ఇవన్నీ సమ సంభావాలే. ఇక్కడ (H, H) అంటే మొదటి నాణెం (₹ 1) పై బొమ్మ మరియు రెండవ నాణెం (₹ 2) పై కుడా బొమ్మ పడింది అని అర్థం. అదేవిధంగా (H, T) అంటే మొదటి నాణెం పై బొమ్మ, రెండో నాణెంపై బొరుసు అని అర్థం. ఇదేవిధంగా మిగిలిన పర్యవసానాలు.

'కనీసం ఒక బొమ్మపడు ఘటన E కు' అనుకూలమైన పర్యవసానాలు (H, H), (H, T) మరియు (T, H). (ఎందుకు?) కాబట్టి, E కు అనుకూలమైన పర్యవసానాల సంఖ్య 3.

అందువలన, $P(E) = \frac{3}{4}$

అంటే, హర్‌ప్రీత్‌కు కనీసం ఒక బొమ్మ పొందే సంభావ్యత $\frac{3}{4}$.

గమనిక : మీరు P(E) ను ఈ క్రింది విధంగా కూడా కనుగొనవచ్చు:

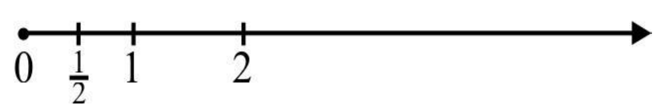
$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \left(\because P(\bar{E}) = P(\text{బొమ్మ కానిది}) = \frac{1}{4}\right)$$

ఇప్పటి వరకు చర్చించిన అన్ని ఉదాహరణలలో, ఒక ప్రయోగం యొక్క మొత్తం పర్యవసనాల సంఖ్య పరిమితంగా ఉందని మీరు గమనించారా? లేకపోతే, ఇప్పుడు పరిశీలించండి.

అనేక ప్రయోగాలలో పర్యవసనాలు ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యల మధ్య గల ఏవేని సంఖ్యలు, లేదా ఒక వృత్తం లేదా దీర్ఘచతురస్రాకారంలోని ప్రతి బిందువుగా ఉండే అవకాశం కూడా ఉంది. ఇలాంటి సందర్భాలలో సాధ్యమయ్యే అన్ని పర్యవసనాల సంఖ్యను మీరు లెక్కించగలరా? ఇవ్వబడిన రెండు సంఖ్యల మధ్య అనంతమైన సంఖ్యలు ఉన్నందున లేదా ఒక వృత్తంలో అనంతమైన బిందువులు ఉన్నందున ఇది సాధ్యం కాదని మీకు తెలుసు. కాబట్టి, సంభావ్యత నిర్వచనం (సైద్ధాంతిక) మీరు ఇప్పటి వరకు నేర్చుకున్న రూపంలో అన్వయించలేము. మరి దీనికి పరిష్కారం ఏమిటి? దీనికి సమాధానం ఇవ్వడానికి, ఈ క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం:

ఉదాహరణ 10* : మ్యూజికల్ చైర్స్ ఆటలో, సంగీతం వినిపించే వ్యక్తి ఆట ప్రారంభించిన 2 నిమిషాల్లోపు ఏ సమయంలోనైనా సంగీతం ఆపివేయమని ఒకామెకు సలహా ఇవ్వబడినది. ఆట ప్రారంభించిన మొదటి అర నిమిషంలోనే సంగీతం ఆగిపోయే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : ఇక్కడ పర్యవసానాలు 0 మరియు 2 మధ్య ఉన్న అన్ని సంఖ్యలు. ఇది 0 నుండి 2 వరకు ఉన్న సంఖ్యారేఖ యొక్క భాగం (పటం 14. 1 చూడండి).



పటం 14.1

* పరీక్ష కోణంలో కాదు.

Let E be the event that 'the music is stopped within the first half-minute'.

The outcomes favourable to E are points on the number line from 0 to $\frac{1}{2}$.

The distance from 0 to 2 is 2, while the distance from 0 to $\frac{1}{2}$ is $\frac{1}{2}$.

Since all the outcomes are equally likely, we can argue that, of the total distance of 2, the distance favourable to the event E is $\frac{1}{2}$.

So, $$P(E) = \frac{\text{Distance favourable to the event E}}{\text{Total distance in which outcomes can lie}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Can we now extend the idea of Example 10 for finding the probability as the ratio of the favourable area to the total area?

Example 11* : A missing helicopter is reported to have crashed somewhere in the rectangular region shown in Fig. 14.2. What is the probability that it crashed inside the lake shown in the figure?

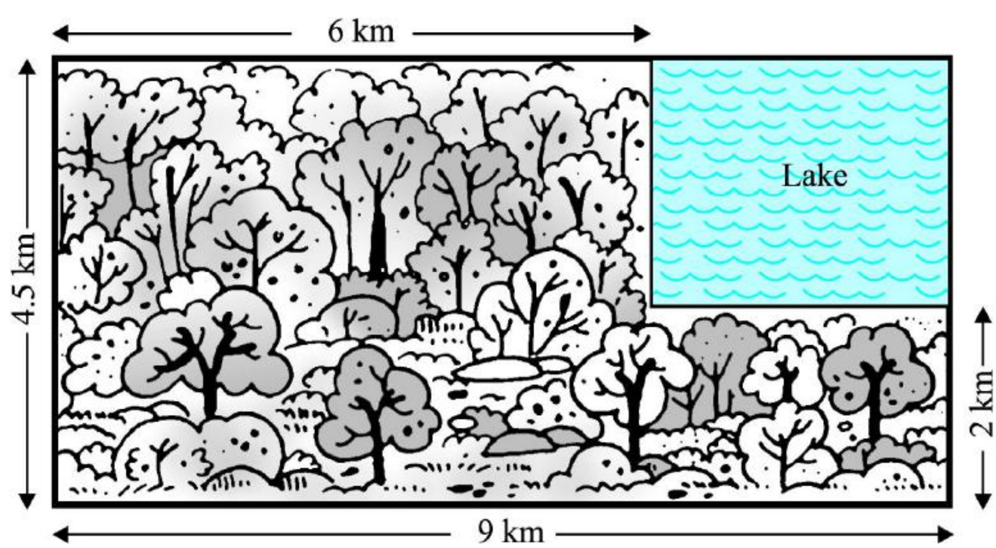


Fig. 14.2

Solution : The helicopter is equally likely to crash anywhere in the region.

Area of the entire region where the helicopter can crash

$$= (4.5 \times 9)\ \text{km}^2 = 40.5\ \text{km}^2$$

* Not from the examination point of view.

'మొదటి అర నిముషంలోపు సంగీతం ఆగి పోతుంది' అనే ఘటనను E అనుకుందాం

E కు అనుకూలమైన పర్యవసనాలు 0 నుండి $\frac{1}{2}$ వరకు సంఖ్యారేఖపై గల అన్ని బిందువులు.

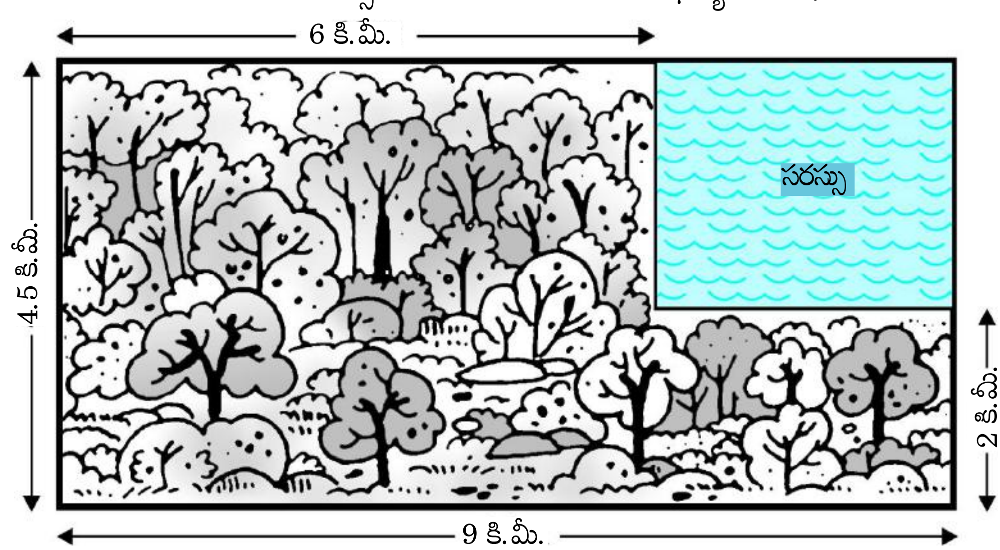
0 నుండి 2 మధ్య దూరం '2', 0 నుండి $\frac{1}{2}$ కు దూరం $\frac{1}{2}$ అవుతుంది.

ప్రయోగాలలో అన్ని పర్యవసనాలు సమసంభవాలు కనుక, మొత్తం దూరాన్ని 2 అని E ఘటనకు అనుకూలమైన దూరం $\frac{1}{2}$ గా పరిగణిస్తాము.

కావున, $$P(E) = \frac{\text{ఘటన E కు అనుకూలమైన దూరం}}{\text{మొత్తం దూరం}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

మనం ఇప్పుడు ఉదాహరణ 10 యొక్క విధానాన్ని అనుకూల ప్రాంత వైశాల్యానికి, మొత్తం వైశాల్యానికి గల నిష్పత్తిగా సంభావ్యతను కనుగొనడానికి కూడా ఉపయోగించగలమా?

ఉదాహరణ 11* : తప్పిపోయిన హెలికాప్టర్ పటం14.2 లో చూపించిన దీర్ఘచతురస్రాకార ప్రాంతంలో ఎక్కడో కూలిపోయినట్లు సమాచారం అందినది. పటంలో చూపిన సరస్సు లోపల అది కూలిపోయే సంభావ్యత ఎంత?



పటం 14.2

సాధన : హెలికాప్టర్ ఈ దీర్ఘచతురస్రాకార ప్రాంతంలో ఎక్కడైనా కూలిపోవడం సమసంభవం.

హెలికాప్టర్ కూలిపోయే ప్రాంతం మొత్తం వైశాల్యం

$$= (4.5 \times 9) \text{ కి.మీ.}^2 = 40.5 \text{ కి.మీ.}^2$$

* పరీక్ష కోణంలో కాదు.

Area of the lake = (2.5×3) km^2 = 7.5 km^2

Therefore, P (helicopter crashed in the lake) = $\frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

Example 12 : A carton consists of 100 shirts of which 88 are good, 8 have minor defects and 4 have major defects. Jimmy, a trader, will only accept the shirts which are good, but Sujatha, another trader, will only reject the shirts which have major defects. One shirt is drawn at random from the carton. What is the probability that

(i) it is acceptable to Jimmy?

(ii) it is acceptable to Sujatha?

Solution : One shirt is drawn at random from the carton of 100 shirts. Therefore, there are 100 equally likely outcomes.

(i) The number of outcomes favourable (i.e., acceptable) to Jimmy = 88 (Why?)

Therefore, P (shirt is acceptable to Jimmy) = $\frac{88}{100} = 0.88$

(ii) The number of outcomes favourable to Sujatha = 88 + 8 = 96 (Why?)

So, P (shirt is acceptable to Sujatha) = $\frac{96}{100} = 0.96$

Example 13 : Two dice, one blue and one grey, are thrown at the same time. Write down all the possible outcomes. What is the probability that the sum of the two numbers appearing on the top of the dice is

(i) 8? (ii) 13? (iii) less than or equal to 12?

Solution : When the blue die shows '1', the grey die could show any one of the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6. The same is true when the blue die shows '2', '3', '4', '5' or '6'. The possible outcomes of the experiment are listed in the table below; the first number in each ordered pair is the number appearing on the blue die and the second number is that on the grey die.

సరస్సు వైశాల్యం = (2.5 × 3) కి.మీ^{2}. = 7.5 కి.మీ^{2}.

కావున, P (సరస్సులో కూలిపోయిన హెలికాప్టర్) $= \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

ఉదాహరణ 12 : ఒక పెట్టెలోని 100 చొక్కాలలో 88 మంచివి, 8 కొద్ది లోపాలు మరియు 4 ఎక్కువ లోపాలను కలిగి ఉన్నాయి. జిమ్మీ అనే వ్యాపారి మంచి చొక్కాలను మాత్రమే స్వీకరిస్తాడు. కానీ సుజాత అనే మరో వ్యాపారి ఎక్కువ లోపాలున్న చొక్కాలను మాత్రమే తిరస్కరిస్తుంది. ఒక చొక్కాను అట్టపెట్ట నుండి యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే ఎవరైనా కొనే సంభావ్యత ఎంత?

(i) జిమ్మీ కొనగలిగేది.

(ii) సుజాత కొనగలిగేది.

సాధన : 100 చొక్కాలు గల పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక చొక్కా తీయబడింది. కనుక, పర్యవసానాలన్నీ సమసంభవాలు.

(i) జిమ్మీకి 1 అనుకూల (కొనుటకు) పర్యవసానాల సంఖ్య = 88 (ఎందుకు?)

అందువల్ల, P (జిమ్మీ చొక్కాను కొనుట) $= \frac{88}{100} = 0.88$

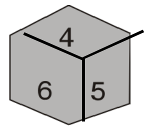
(ii) సుజాతకు అనుకూలమైన పర్యవసానాల సంఖ్య = 88 + 8 = 96 (ఎందుకు?)

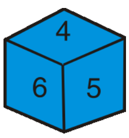
కాబట్టి, P (సుజాత చొక్కా కొనుట) $= \frac{96}{100} = 0.96$

ఉదాహరణ 13 : రెండు పాచికలు ఒకటి నీలం, ఒకటి బూడిద రంగుది ఒకే సారి దొర్లించడమైనది. సాధ్యమయ్యే అన్ని పర్యవసానాలను రాయండి. రెండు పాచికల పైభాగంలో కనిపించే రెండు సంఖ్యల మొత్తం

(i) 8? (ii) 13? (iii) 12 కంటే తక్కువ లేదా సమానం అయ్యే సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

సాధన : నీలం పాచిక '1' చూపించినప్పుడు, బూడిద రంగు పాచిక 1, 2, 3, 4, 5, 6 సంఖ్యలలో దేనినైనా చూపించగలదు. నీలం పాచిక '2', '3', '4', '5' లేదా '6' చూపించినప్పుడు కూడా ఇది వర్తిస్తుంది. ఈ ప్రయోగంలో సాధ్యపడు అన్ని పర్యవసానాలను క్రింది పట్టికలో క్రమయుగ్మాలుగా చూపబడ్డాయి. ప్రతి క్రమయుగ్మంలో మొదటి సంఖ్య నీలం పాచిక పై కనిపించే సంఖ్య మరియు రెండవ సంఖ్య బూడిద రంగు పాచిక పై కనిపించే సంఖ్య.





	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fig. 14.3

Note that the pair (1, 4) is different from (4, 1). (Why?)

So, the number of possible outcomes = $6 \times 6 = 36$.

(i) The outcomes favourable to the event 'the sum of the two numbers is 8' denoted by E, are: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) (see Fig. 14.3)

i.e., the number of outcomes favourable to E = 5.

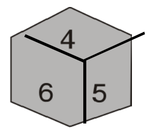
Hence, $$P(E) = \frac{5}{36}$$

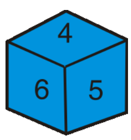
(ii) As you can see from Fig. 14.3, there is no outcome favourable to the event F, 'the sum of two numbers is 13'.

So, $$P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

(iii) As you can see from Fig. 14.3, all the outcomes are favourable to the event G, 'sum of two numbers ≤ 12'.

So, $$P(G) = \frac{36}{36} = 1$$





	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

పటం 14.3

క్రమయుగ్మ జత (1, 4); (4, 1) లు వేర్వేరు అని గమనించండి. (ఎందుకు?)

కాబట్టి, అన్ని పర్యవసానాల సంఖ్య $= 6 \times 6 = 36$.

(i) E ద్వారా సూచించబడే 'రెండు సంఖ్యల మొత్తం 8' అనే ఘటనకు అనుకూల పర్యవసానాలు : (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) (పటం 14.3 చూడండి)

అంటే, E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య $= 5$

కనుక, $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) పటం 14.3 నుండి. F తో సూచించబడిన 'రెండు సంఖ్యల మొత్తం 13' అనే ఘటనకు అనుకూల పర్యవసానం లేదు.

కనుక, $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) పటం 14.3 నుండి Gతో సూచించబడిన 'రెండు సంఖ్యల మొత్తం ≤ 12' కు అన్ని పర్యవసానాలు అనుకూలములే.

కనుక, $P(G) = \frac{36}{36} = 1$

EXERCISE 14.1

1. Complete the following statements:
   (i) Probability of an event E + Probability of the event 'not E' = _______ .
   (ii) The probability of an event that cannot happen is _____ . Such an event is called _____.
   (iii) The probability of an event that is certain to happen is _______ . Such an event is called _______ .
   (iv) The sum of the probabilities of all the elementary events of an experiment is _______ .
   (v) The probability of an event is greater than or equal to _______ and less than or equal to ________ .
2. Which of the following experiments have equally likely outcomes? Explain.
   (i) A driver attempts to start a car. The car starts or does not start.
   (ii) A player attempts to shoot a basketball. She/he shoots or misses the shot.
   (iii) A trial is made to answer a true-false question. The answer is right or wrong.
   (iv) A baby is born. It is a boy or a girl.
3. Why is tossing a coin considered to be a fair way of deciding which team should get the ball at the beginning of a football game?
4. Which of the following cannot be the probability of an event?

   (A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7
5. If P(E) = 0.05, what is the probability of 'not E'?
6. A bag contains lemon flavoured candies only. Malini takes out one candy without looking into the bag. What is the probability that she takes out
   (i) an orange flavoured candy?
   (ii) a lemon flavoured candy?
7. It is given that in a group of 3 students, the probability of 2 students not having the same birthday is 0.992. What is the probability that the 2 students have the same birthday?
8. A bag contains 3 red balls and 5 black balls. A ball is drawn at random from the bag. What is the probability that the ball drawn is (i) red ? (ii) not red?
9. A box contains 5 red marbles, 8 white marbles and 4 green marbles. One marble is taken out of the box at random. What is the probability that the marble taken out will be (i) red ? (ii) white ? (iii) not green?

అభ్యాసం 14.1

1. ఈ క్రింది ప్రవచనాలను పూరించండి:

(i) ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత E + ఆ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 'E కాదు' = ________ .

(ii) ఎప్పటికీ జరగని ఘటన యొక్క సంభావ్యత ______ . అటువంటి ఘటనను ______ అంటారు.

(iii) ఒక ఘటన ఖచ్చితంగా జరిగే సంభావ్యత ________ . అటువంటి ఘటనను ________ అంటారు.

(iv) ఒక ప్రయోగంలోని అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం ________ .

(v) ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత ఎల్లప్పుడూ ________ కంటే ఎక్కువ లేదా సమానం మరియు _________ కంటే తక్కువ లేదా సమానంగా ఉంటుంది..

2. ఈ క్రింది ప్రయోగాలలో దేని పర్యవసానాలు సమసంభవములు కలిగి ఉంది? వివరించుము.

(i) ఒక డ్రైవర్ కారును స్టార్ట్ చేయడానికి ప్రయత్నించాడు. కారు స్టార్ట్ అవుతుంది లేదా స్టార్ట్ అవదు.

(ii) ఒక ఆటగాడు బాస్కెట్ బాల్‌ని కొట్టడానికి ప్రయత్నిస్తాడు. అతడు బాల్‌ని కొడతాడు లేదా కొట్టలేడు.

(iii) సత్యం (T) – అసత్యం (F) ప్రశ్నకు సమాధానం ఇస్తే, సమాధానం సరైనదా లేదా తప్పా.

(iv) ఒక శిశువు జన్మిస్తే, ఆ శిశువు అబ్బాయి లేక అమ్మాయి అయ్యే అవకాశం.

3. ఒక ఫుట్‌బాల్ ఆట ప్రారంభంలో బంతిని ఏ జట్టు పొందాలో నిర్ణయించడానికి ఒక నాణేన్ని ఎగురవేయటం నిష్పాక్షికంగా ఎందుకు పరిగణించబడుతుంది?

4. ఈ క్రింది వాటిలో ఏది ఘటన యొక్క సంభావ్యత కాదు?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) –1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. ఒకవేళ P(E) = 0.05 అయితే, 'E కానిది' యొక్క సంభావ్యత ఎంత?

6. ఒక సంచిలో నిమ్మ రుచి గల మిఠాయిలు మాత్రమే ఉన్నాయి. మాలిని సంచిలోకి చూడకుండా ఒక మిఠాయిని తీస్తే అది

(i) నారింజ రుచి గల మిఠాయి అవడానికి

(ii) నిమ్మ రుచి గల మిఠాయి అవడానికి సంభావ్యత ఎంతెంత?

7. ముగ్గురు విద్యార్థులలో, ఇద్దరు విద్యార్థులు ఒకే పుట్టినరోజును కలిగిఉండని సంభావ్యత 0.992. ఇద్దరు విద్యార్థులకు ఒకే పుట్టినరోజు ఉండే సంభావ్యత ఎంత?

8. ఒక సంచిలో 3 ఎరుపు, 5 నలుపు బంతులు ఉన్నాయి. సంచి నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీస్తే అది (i) ఎరుపు బంతి అగుటకు (ii) ఎరుపు బంతి కాకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

9. ఒకపెట్టెలో 5 ఎరుపు, 8 తెలుపు, 4 ఆకుపచ్చ గోళీలు ఉన్నాయి పెట్టె నుండి ఒక గోళీని యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే అది (i) ఎరుపు (ii) తెలుపు (iii) ఆకుపచ్చది కానిది అగుటకు సంభావ్యతలు కనుగొనండి.

10. A piggy bank contains hundred 50p coins, fifty ₹ 1 coins, twenty ₹ 2 coins and ten ₹ 5 coins. If it is equally likely that one of the coins will fall out when the bank is turned upside down, what is the probability that the coin (i) will be a 50 p coin ? (ii) will not be a ₹ 5 coin?

11. Gopi buys a fish from a shop for his aquarium. The shopkeeper takes out one fish at random from a tank containing 5 male fish and 8 female fish (see Fig. 14.4). What is the probability that the fish taken out is a male fish?

Fig. 14.4

12. A game of chance consists of spinning an arrow which comes to rest pointing at one of the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (see Fig. 14.5), and these are equally likely outcomes. What is the probability that it will point at

(i) 8 ?

(ii) an odd number?

(iii) a number greater than 2?

(iv) a number less than 9?

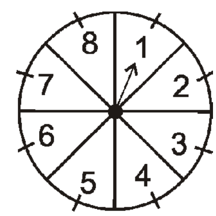


Fig. 14.5

13. A die is thrown once. Find the probability of getting

(i) a prime number; (ii) a number lying between 2 and 6; (iii) an odd number.

14. One card is drawn from a well-shuffled deck of 52 cards. Find the probability of getting

(i) a king of red colour (ii) a face card (iii) a red face card

(iv) the jack of hearts (v) a spade (vi) the queen of diamonds

15. Five cards—the ten, jack, queen, king and ace of diamonds, are well-shuffled with their face downwards. One card is then picked up at random.

(i) What is the probability that the card is the queen?

(ii) If the queen is drawn and put aside, what is the probability that the second card picked up is (a) an ace? (b) a queen?

16. 12 defective pens are accidentally mixed with 132 good ones. It is not possible to just look at a pen and tell whether or not it is defective. One pen is taken out at random from this lot. Determine the probability that the pen taken out is a good one.

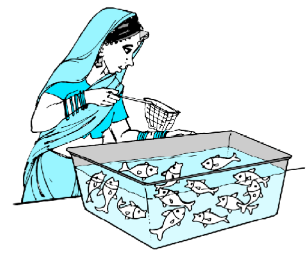
17. (i) A lot of 20 bulbs contain 4 defective ones. One bulb is drawn at random from the lot. What is the probability that this bulb is defective?

(ii) Suppose the bulb drawn in (i) is not defective and is not replaced. Now one bulb is drawn at random from the rest. What is the probability that this bulb is not defective ?

18. A box contains 90 discs which are numbered from 1 to 90. If one disc is drawn at random from the box, find the probability that it bears (i) a two-digit number (ii) a perfect square number (iii) a number divisible by 5.

10. ఒక పిగ్గీ బ్యాంకులో వంద 50 పై. నాణేలు, యాభై ₹ 1 నాణేలు, ఇరవై ₹ 2 నాణేలు, పది ₹ 5 నాణేలు ఉన్నాయి. పిగ్గీ బ్యాంకును తలకిందులుగా చేసినప్పుడల్లా యాదృచ్ఛికంగా ఒక నాణెం పడుతుంటే ఆ నాణెం (i) 50 పై. నాణెం అగుటకు (ii) ₹ 5 నాణెం కాకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

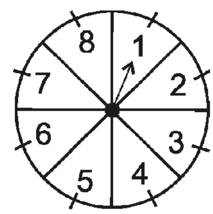
11. గోపి తన అక్వేరియం కోసం ఒక దుకాణం నుండి ఒక చేపను కొన్నాడు. దుకాణదారు 5 మగ చేపలు మరియు 8 ఆడ చేపలు ఉన్న ట్యాంకు నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక చేపను బయటకు తీస్తే (పటం 14.4 చూడండి). ఆ చేప మగచేప అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?



పటం 14.4

12. ఒక ఆట నందు వేగంగా తిప్పబడిన బాణపు గుర్తు 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (పటం 14.5 చూడండి) సంఖ్యలలో ఒకదాన్ని చూపిస్తూ ఆగుతుంది. అన్ని పర్యవసానములు సమ సంభవాలైతే బాణాన్ని ఒకసారి తిప్పడం వలన అది క్రింది వానిని సూచించే సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

(i) 8
(ii) బేసి సంఖ్య
(iii) 2 కంటే పెద్ద సంఖ్య
(iv) 9 కంటే చిన్న సంఖ్య



పటం 14.5

13. ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు (i) ఒక ప్రధాన సంఖ్య; (ii) 2 మరియు 6 మధ్యఉన్నసంఖ్య; (iii) బేసి సంఖ్యలను పొందే సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

14. బాగుగా కలుపబడిన పేక ముక్కల (52) కట్ట నుండి ఒక కార్డు తీయబడింది. అయితే అది క్రింది కార్డు అగుటకు సంభావ్యతలు లెక్కించండి.

(i) ఎరుపు రాజు (ii) ముఖ కార్డు (iii) ఎరుపు ముఖ కార్డు
(iv) హృదయం గుర్తు గల జాకీ (v) స్పేడ్ (vi) డైమండ్ గుర్తు గల రాణి

15. పేక ముక్కలలోని డైమండ్ గుర్తు గల ఐదు కార్డులు – పది, జాక్, రాణి, రాజు, ఏస్ లను బాగా కలిపి వాటి ముఖాన్ని కింది వైపుకి ఉంచి ఒక కార్డును యాదృచ్ఛికంగా తీసుకున్నారు.

(i) ఆ కార్డు రాణి అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?
(ii) ఒక వేళ రాణిని తొలగించి రెండవ కార్డును ఎన్నుకుంటే అది (a) ఏస్ అగుటకు (b) రాణి అగుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

16. లోపాలు గల 12 పెన్నులు అనుకోకుండా 132 మంచి పెన్నులతో కలిసిపోయాయి. కేవలం పెన్నును చూసి అది లోపాలు గలిగినది లేదో చెప్పడం సాధ్యం కాదు. ఇందులో నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక పెన్నును బయటకు తీస్తే, అది మంచిది అగుటకు సంభావ్యతను లెక్కించండి.

17. (i) 20 బల్బులు గల పెట్టెలో 4 లోపాలు కలిగినవి ఉన్నాయి. వాటి నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బల్బ్ ను తీసినప్పుడు, ఈ బల్బు లోపాలు గలిగినది అగుటకు ఉండే సంభావ్యత ఎంత?

(ii) ఒకవేళ (i) లో తీసిన బల్బు లోపం లేనిదిఅయి, దానిని తిరిగి ఆ పెట్టెలో పెట్టలేదనుకుందాం. ఇప్పుడు ఒక బల్బును మిగిలిన వాటి నుండి యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే ఈ బల్బు లోపం లేనిది అగు సంభావ్యత ఎంత?

18. ఒక పెట్టెలో 1 నుండి 90 వరకు సంఖ్యలు వేయబడిన 90 ఫలకాలు ఉన్నాయి. ఆ పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక ఫలకాన్ని తీసినట్లయితే, అది (i) రెండంకెల సంఖ్య (ii) పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య (iii) 5 చే భాగించబడే సంఖ్య కలిగి ఉండే సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

19. A child has a die whose six faces show the letters as given below:

A B C D E A

The die is thrown once. What is the probability of getting (i) A? (ii) D?

20*. Suppose you drop a die at random on the rectangular region shown in Fig. 14.6. What is the probability that it will land inside the circle with diameter 1m?

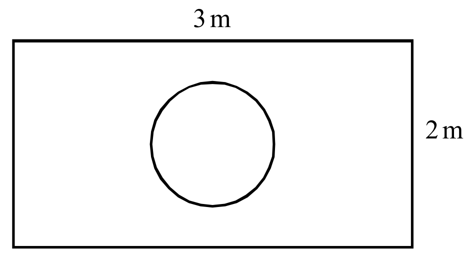


Fig. 14.6

21. A lot consists of 144 ball pens of which 20 are defective and the others are good. Nuri will buy a pen if it is good, but will not buy if it is defective. The shopkeeper draws one pen at random and gives it to her. What is the probability that

(i) She will buy it ?

(ii) She will not buy it ?

22. Refer to Example 13. (i) Complete the following table:

Event : 'Sum on 2 dice'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probability	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) A student argues that 'there are 11 possible outcomes 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 and 12. Therefore, each of them has a probability $\frac{1}{11}$. Do you agree with this argument? Justify your answer.

23. A game consists of tossing a one rupee coin 3 times and noting its outcome each time. Hanif wins if all the tosses give the same result i.e., three heads or three tails, and loses otherwise. Calculate the probability that Hanif will lose the game.

24. A die is thrown twice. What is the probability that

(i) 5 will not come up either time? (ii) 5 will come up at least once?

[**Hint :** Throwing a die twice and throwing two dice simultaneously are treated as the same experiment]

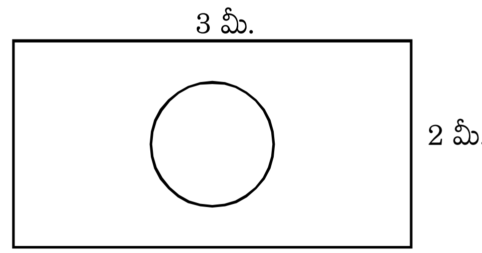
* Not from the examination point of view.

19. ఒక పిల్లవాడి వద్ద ఒక పాచిక ఉంది, దాని ఆరు ముఖాలు ఈ క్రింది విధంగా అక్షరాలను చూపుతాయి:

A B C D E A

పాచికను ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు, (i) A పొందే, (ii) D పొందే సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

20*. పటం14.6లో చూపించిన దీర్ఘచతురస్రాకార ప్రాంతంపై యాదృచ్ఛికంగా ఒక పాచికను జారవేసారనుకుందాం. ఆ పాచిక 1 మీ. వ్యాసం కలిగిన వృత్తంలో పడే సంభావ్యత ఎంత?



పటం **14.6**

21. ఒక కట్టలో గల 144 పెన్నులలో 20 లోపాలు కలిగినవి, మిగిలినవి మంచివి. నూరి పెన్ను బాగుంటే కొంటుంది, కానీ లోపం ఉంటే కొనదు. దుకాణదారుడు యాదృచ్ఛికంగా ఒక పెన్ను తీసి ఆమెకు ఇస్తే, దానిని

(i) ఆమె కొనుగోలు చేయుటకు

(ii) ఆమె కొనని సంభావ్యతలు ఎంతెంత ?

22. ఉదాహరణ 13 ను చూడండి. 13. (i) కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి:

ఘటన: '2 పాచికలపై మొత్తం'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ఒక విద్యార్థి '2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 మరియు 12 అనే పర్యవసానాలు ఉన్నాయి అని వాదిస్తున్నాడు. అందువలన, ఒక్కొక్క పర్యవసానము సంభావ్యత $\frac{1}{11}$ ఉంటుంది అన్నాడు. ఈ వాదనతో మీరు ఏకీభవిస్తారా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

23. ఒక ఆటలో ఒక రూపాయి నాణేన్ని 3 సార్లు ఎగురవేసి, ప్రతి సారీ దాని ఫలితాన్ని పరిశీలించారు. అన్నీ ఒకే ఫలితాన్ని ఇస్తే అంటే మూడూ బొమ్మలు లేదా మూడూ బొరుసులు వస్తే హనీఫ్ గెలుస్తాడు, లేకపోతే ఓడిపోతాడు. హనీఫ్ ఓడిపోయే సంభావ్యతను లెక్కించండి.

24. ఒక పాచికను రెండుసార్లు దొర్లించారు. కనీసం ఒక్కసారి

(i) 5 పాచికపై కనిపించకపోవడానికి (ii) కనీసం ఒక్కసారైనా 5 కనిపించుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

[**సూచన:** రెండు సార్లు ఒక పాచికను దొర్లించడం లేదా ఒకేసారి రెండు పాచికలు దొర్లించడం ఒకే ప్రయోగంగా

* పరీక్షకోసం కాదు.

25. Which of the following arguments are correct and which are not correct? Give reasons for your answer.

(i) If two coins are tossed simultaneously there are three possible outcomes—two heads, two tails or one of each. Therefore, for each of these outcomes, the probability is $\frac{1}{3}$.

(ii) If a die is thrown, there are two possible outcomes—an odd number or an even number. Therefore, the probability of getting an odd number is $\frac{1}{2}$.

14.2 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. The theoretical (classical) probability of an event E, written as P(E), is defined as

$$P(E) = \frac{\text{Number of outcomes favourable to E}}{\text{Number of all possible outcomes of the experiment}}$$

where we assume that the outcomes of the experiment are equally likely.

2. The probability of a sure event (or certain event) is 1.

3. The probability of an impossible event is 0.

4. The probability of an event E is a number P(E) such that

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

5. An event having only one outcome is called an elementary event. The sum of the probabilities of all the elementary events of an experiment is 1.

6. For any event E, $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, where $\bar{E}$ stands for 'not E'. E and $\bar{E}$ are called complementary events.

A NOTE TO THE READER

The experimental or empirical probability of an event is based on what has actually happened while the theoretical probability of the event attempts to predict what will happen on the basis of certain assumptions. As the number of trials in an experiment, go on increasing we may expect the experimental and theoretical probabilities to be nearly the same.

25. కింది వాటిలో ఏది సరియైనది, ఏది సరికానిది? మీ సమాధానానికి తగిన కారణాలు తెలపండి.

(i) రెండు నాణాలను ఒకేసారి ఎగురవేస్తే అప్పుడు మూడు పర్యవసానాలు ఉంటాయి – రెండు బొమ్మలు, రెండు బొరుసులు లేదా ఒకటి బొమ్మ, మరొకటి బొరుసు ఈ పర్యవసానాల సంభావ్యత $\frac{1}{3}$.

(ii) ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు రెండు పర్యవసానాలు ఉన్నాయి ఒక బేసి సంఖ్య లేదా సరి సంఖ్య. అందువల్ల, బేసిసంఖ్యను పొందే సంభావ్యత $\frac{1}{2}$.

14.2 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు:

1. P(E) గా వ్రాయబడిన ఒక సంఘటన E యొక్క సైద్ధాంతిక (సాంప్రదాయక) సంభావ్యతను ఇలా నిర్వచిస్తారు

$$P(E) = \frac{\text{E కు అనుకూలమైన పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{ప్రయోగం యొక్క అన్ని సంభావ్యపర్యవసానాల సంఖ్య}}$$

ఇక్కడ ప్రయోగం యొక్క పర్యవసానాలు సమ సంభవం అని మనం భావిస్తాము.

2. ఒక నిర్దిష్ట ఘటన యొక్క సంభావ్యత (లేదా ఖచ్చిత ఘటన) 1.

3. అసాధ్య ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0.

4. ఒక ఘటన E యొక్క సంభావ్యత P(E) అనేది ఒక సంఖ్య.

మరియు $$0 \le P(E) \le 1$$

5. ఒకే ఒక అనుకూల పర్యవసానం గల ఘటనను ప్రాథమిక ఘటన అంటారు. ఒక ప్రయోగంలోని అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం 1.

6. ఏదైనా ఘటన Eకు $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, ఇక్కడ $\bar{E}$ అంటే 'E కాదు'. E మరియు $\bar{E}$ లను పూరక ఘటనలు అంటారు.

పాఠకులకు ఒక గమనిక

ఒక సంఘటన యొక్క ప్రయోగాత్మక లేదా అనుభవ పూర్వక సంభావ్యత వాస్తవంగా ఏమి జరిగిందనే దానిపై ఆధారపడి ఉంటుంది, అయితే ఘటన యొక్క సైద్ధాంతిక సంభావ్యత కొన్ని పరికల్పనల ఆధారంగా ఏమి జరుగుతుందో అంచనా వేయడానికి ప్రయత్నిస్తుంది. ఒక ప్రయోగంలో ప్రయత్నాల సంఖ్య పెరుగుతున్న కొద్దీ, ప్రయోగాత్మక మరియు సైద్ధాంతిక సంభావ్యతలు దాదాపు ఒకేలా ఉంటాయని మనం ఆశించవచ్చు.

MATHEMATICAL MODELLING A2

A2.1 Introduction

- An adult human body contains approximately 1,50,000 km of arteries and veins that carry blood.
- The human heart pumps 5 to 6 litres of blood in the body every 60 seconds.
- The temperature at the surface of the Sun is about 6,000° C.

Have you ever wondered how our scientists and mathematicians could possibly have estimated these results? Did they pull out the veins and arteries from some adult dead bodies and measure them? Did they drain out the blood to arrive at these results? Did they travel to the Sun with a thermometer to get the temperature of the Sun? Surely not. Then how did they get these figures?

Well, the answer lies in **mathematical modelling,** which we introduced to you in Class IX. Recall that a mathematical model is a mathematical description of some real-life situation. Also, recall that mathematical modelling is the process of creating a mathematical model of a problem, and using it to analyse and solve the problem.

So, in mathematical modelling, we take a real-world problem and convert it to an equivalent mathematical problem. We then solve the mathematical problem, and interpret its solution in the situation of the real-world problem. And then, it is important to see that the solution, we have obtained, 'makes sense', which is the stage of validating the model. Some examples, where mathematical modelling is of great importance, are:

(i) Finding the width and depth of a river at an unreachable place.

(ii) Estimating the mass of the Earth and other planets.

(iii) Estimating the distance between Earth and any other planet.

(iv) Predicting the arrrival of the monsoon in a country.

గణిత నమూనాలు A2

A 2.1 పరిచయం

- పరిపూర్ణ మానవ శరీరము నందు సుమారు 1,50,000 కి.మీ. పొడవున ధమనులు, సిరలు రక్తాన్ని తీసుకొని పోతాయి.
- మానవుని గుండె ప్రతి 60 సెకన్లకు 5 నుండి 6 లీటర్ల రక్తాన్ని శరీరంలో పంపు చేస్తుంది.
- సూర్యుని ఉపరితల ఉష్ణోగ్రత సుమారు $6{,}000^\circ$ C.

మన విజ్ఞానశాస్త్రవేత్తలు మరియు గణిత శాస్త్రవేత్తలు ఇటువంటి ఫలితాలను ఎలా అంచనా వేయగలరని మీరు ఎప్పుడైనా ఆలోచించారా? చనిపోయిన మనిషి శరీరం నుండి ధమనులు, సిరలను వీరు బయటికి లాగి కొలిచారా? ఈ ఫలితాలను తెలుసుకోవడానికి శరీరంలోని మొత్తం రక్తాన్ని ఎవరైనా బయటకు తోడారా? సూర్యుని ఉపరితల ఉష్ణోగ్రతను తెలుసుకొనుటకు ఉష్ణమాపకాన్ని తీసుకుని సూర్యుని మీదకు వెళ్లారా? ఖచ్చితంగా కాదు. మరి వారు ఈ సంఖ్యలు ఎలా పొందారు?

సరే, మీకు 9వ తరగతిలోనే పరిచయం చేసిన వీటి సమాధానాలు గణిత నమూనాలలో వున్నాయి. గణిత శాస్త్ర నమూనా అనేది నిజ జీవిత ఘటనలకు గణితాత్మక వివరణని గుర్తుతెచ్చుకోవాలి. ఇంకా, గణిత నమూనా అనేది గణిత నమూనా యొక్క సమస్యను సృష్టించే పద్ధతి అని కూడా జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోవాలి మరియు దానిని విశ్లేషణ చేసి సమస్య సాధన చేయాలి.

కావున, గణిత శాస్త్ర నమూనానందు మనం నిజమైన ప్రాపంచిక సమస్యల తీసుకొని, దానికి తుల్యమైన గణిత సమస్యలగా మారుస్తాం. గణిత సమస్య సాధన ద్వారా, నిజ ప్రాపంచిక సమస్య సాధన పరిస్థితులను అంచనా వేస్తాం. అలా సమస్య సాధన యొక్క ప్రాముఖ్యతను గుర్తించి మంచి అనుభూతిని పొంది, తద్వారా నమూనాకు సంబంధించిన జ్ఞానంతో ఉన్నత స్థితికి చేరుతాం. గణిత నమూనా యొక్క విశిష్టతను తెలియజేయు కొన్ని ఉదాహరణలు:

(i) నదిలో మనము చేరుకోలేని ప్రాంతపు వెడల్పు మరియు లోతులను తెలుసుకొనుట.

(ii) భూగోళము మరియు వివిధ గ్రహాల ద్రవ్యరాశులను అంచనా వేయుట.

(iii) భూమి మరియు ఇతర గ్రహాల మధ్య దూరాన్ని అంచనా వేయుట.

(iv) ఒక దేశంలోనికి ఋతుపవనాలు ఎప్పుడు ప్రవేశిస్తాయో అంచనా వేయుట.

(v) Predicting the trend of the stock market.

(vi) Estimating the volume of blood inside the body of a person.

(vii) Predicting the population of a city after 10 years.

(viii) Estimating the number of leaves in a tree.

(ix) Estimating the ppm of different pollutants in the atmosphere of a city.

(x) Estimating the effect of pollutants on the environment.

(xi) Estimating the temperature on the Sun's surface.

In this chapter we shall revisit the process of mathematical modelling, and take examples from the world around us to illustrate this. In Section A2.2 we take you through all the stages of building a model. In Section A2.3, we discuss a variety of examples. In Section A2.4, we look at reasons for the importance of mathematical modelling.

A point to remember is that here we aim to make you aware of an important way in which mathematics helps to solve real-world problems. However, you need to know some more mathematics to really appreciate the power of mathematical modelling. In higher classes some examples giving this flavour will be found.

A2.2 Stages in Mathematical Modelling

In Class IX, we considered some examples of the use of modelling. Did they give you an insight into the process and the steps involved in it? Let us quickly revisit the main steps in mathematical modelling.

Step 1 (Understanding the problem) : Define the real problem, and if working in a team, discuss the issues that you wish to understand. Simplify by making assumptions and ignoring certain factors so that the problem is manageable.

For example, suppose our problem is to estimate the number of fishes in a lake. It is not possible to capture each of these fishes and count them. We could possibly capture a sample and from it try and estimate the total number of fishes in the lake.

Step 2 (Mathematical description and formulation) : Describe, in mathematical terms, the different aspects of the problem. Some ways to describe the features mathematically, include:

- define variables
- write equations or inequalities
- gather data and organise into tables
- make graphs
- calculate probabilities

(v) స్టాక్ మార్కెట్ పోకడలను ముందుగా ఊహించి చెప్పుట.

(vi) ఒక మనిషి శరీరంలో ఉండే రక్తం యొక్క పరిమాణమును అంచనా వేయుట.

(vii) పది సంవత్సరముల తరువాత ఒక నగర జనాభా ఎంత ఉండ బోతుందో ముందే ఊహించి చెప్పుట.

(viii) ఒక చెట్టుకు ఎన్ని ఆకులు ఉంటాయో లెక్కించకనే అంచనా వేయుట.

(ix) ఒక నగరములోని నిర్దేశించిన విస్తీర్ణం లో గల కాలుష్య కారకాలను (ppm) అంచనావేయుట.

(x) కాలుష్య కారకాల ప్రభావం పర్యావరణం పై ఎలా ఉండబోతుందో అంచనా వేయుట.

(xi) సూర్యుని ఉపరితలంపై ఉష్ణోగ్రతను అంచనా వేయుట.

ఈ అధ్యాయంలో మన చుట్టూ ఉన్న ప్రపంచం నుండి మరికొన్ని ఉదాహరణలు గమనించి, గణిత నమూనా ద్వారా వాటిని సాధించే విధానాన్ని పున:దర్శనం చేద్దాం. A2.2 విభాగం నందు నమూనా నిర్మాణ దశలు గురించి వివరించబడినది. A2.3 విభాగము నందు విభిన్న ఉదాహరణలు చర్చించడం జరిగింది. A2.4 విభాగము నందు గణిత నమూనాలకు ఉన్న ప్రాముఖ్యతకు గల కారణాలను గురించి వివరించడం జరిగింది.

మీ నిజ జీవితంలో మీ చుట్టూ ఉండే ప్రాపంచిక సమస్యలను జాగరూకతతో మీరు గణితాన్ని ఉపయోగించి, పరిష్కరించుకునేటట్లు చేయడమే ఈ అధ్యాయ ప్రధాన లక్ష్యం. గణిత నమూనా శక్తిని నిజంగా అభినందించటానికి మీరు మరికొంత గణితంను తెలుసుకోవాల్సి ఉంటుంది. రానున్న పై తరగతులలో వీటికి అనుకూలమైన మరికొన్ని ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినవి.

A 2.2 గణిత నమూనా సోపానాలు

9వ తరగతిలో, గణిత నమూనాలందు కొన్ని ఉదాహరణలు పరిగణలోకి తీసుకొని వివరించడం జరిగింది. అందులో ఇమిడీకృతమైన సోపాన క్రమం మరియు ప్రక్రియ మీ పరిజ్ఞానాన్ని పెంపొందించుటకు దోహదపడిందా? ఇప్పుడు మరొకసారి గణిత నమూనా సోపానాల గురించి పున:దర్శనం చేద్దాం.

సోపానం 1 (సమస్యను అవగాహన చేసుకొనుట) : యదార్థ సమస్యను నిర్వచించాలి. బృందంలో పని చేస్తుంటే ఏ అంశాలను అర్థం చేసుకోవాలనుకుంటున్నారో చర్చించాలి. చర్చించిన వాటిలో కొన్ని అవసరము లేదు అనుకున్న అంశాలను విస్మరించడం ద్వారా అనుసరణీయమైన భావనలను సూక్ష్మీకరించాలి.

ఉదాహరణకు "ఒక చెరువులో ఉన్న చేపల సంఖ్యను అంచనా వేయుట" అనేది మన సమస్య అనుకుందాం. ప్రతి చేపను పట్టుకొని లెక్కించడం మనకు సాధ్యం కాదు. చెరువులో కొంత ప్రాంతంలో ఉన్న చేపలను పట్టి లెక్కించడం ద్వారా, చెరువు అంతటిలో ఉన్న చేపలను సంఖ్యను అంచనా వేయగలం.

సోపానం 2 (గణిత వివరణ మరియు సూత్రీకరణ) : గణిత పదాలను, సమస్యను అన్ని కోణాలలో గణితాత్మకంగా విశ్లేషణ చేయాలి. గణిత వివరణ క్రింది అంశాలను కలిగి ఉండాలి:

- చరరాశులను నిర్వచించండి.
- సమీకరణాలు లేక అసమీకరణాలు రాయుట.
- దత్తాంశాన్ని సేకరించి పట్టికలలో వేయాలి.
- గ్రాఫ్‌లు తయారు చేయుట.
- సంభావ్యతలను లెక్కించుట

For example, having taken a sample, as stated in Step 1, how do we estimate the entire population? We would have to then mark the sampled fishes, allow them to mix with the remaining ones in the lake, again draw a sample from the lake, and see how many of the previously marked ones are present in the new sample. Then, using ratio and proportion, we can come up with an estimate of the total population. For instance, let us take a sample of 20 fishes from the lake and mark them, and then release them in the same lake, so as to mix with the remaining fishes. We then take another sample (say 50), from the mixed population and see how many are marked. So, we gather our data and analyse it.

One major assumption we are making is that the marked fishes mix uniformly with the remaining fishes, and the sample we take is a good representative of the entire population.

Step 3 (Solving the mathematical problem) : The simplified mathematical problem developed in Step 2 is then solved using various mathematical techniques.

For instance, suppose in the second sample in the example in Step 2, 5 fishes are marked. So, $\frac{5}{50}$, i.e., $\frac{1}{10}$, of the population is marked. If this is typical of the whole population, then $\frac{1}{10}$th of the population = 20.

So, the whole population = $20 \times 10 = 200$.

Step 4 (Interpreting the solution) : The solution obtained in the previous step is now looked at, in the context of the real-life situation that we had started with in Step 1.

For instance, our solution in the problem in Step 3 gives us the population of fishes as 200.

Step 5 (Validating the model) : We go back to the original situation and see if the results of the mathematical work make sense. If so, we use the model until new information becomes available or assumptions change.

Sometimes, because of the simplification assumptions we make, we may lose essential aspects of the real problem while giving its mathematical description. In such cases, the solution could very often be off the mark, and not make sense in the real situation. If this happens, we reconsider the assumptions made in Step 1 and revise them to be more realistic, possibly by including some factors which were not considered earlier.

ఉదాహరణకు, సోపానము 1 లో నిర్వచించినట్లు ఒక నమూనా తీసుకొనగా, మొత్తం చేపల సంఖ్యను అంచనా వేయడం ఎలా? చెరువులో ఒక ప్రత్యేక ప్రాంతం నుండి సేకరించిన మాదిరి చేపలకు కొన్ని ప్రత్యేక గుర్తులు తగిలించి వాటిని మళ్లీ చెరువులోకి వదలాలి. అవి మిగిలిన వాటితో కలిసిపోయే వరకు కొంత సమయం ఇచ్చి మళ్లీ కొన్ని చేపలను సేకరించాలి. ఇప్పుడు సేకరించిన వాటిలో ముందు సేకరించి, గుర్తులు పెట్టినవి ఎన్ని ఉన్నాయో లెక్కించాలి. అప్పుడు, నిష్పత్తులు, అనుపాతములు ఉపయోగించి చెరువులోని చేపల జనాభా గురించి ఒక అంచనావేయగలం. సందర్భోచితంగా, చెరువు నుండి 20 చేపల నమూనా సేకరించి వాటికి గుర్తులు తగిలించి,అదే చెరువులో వాటిని విడిచి, మిగిలిన వాటితో కలిసి పోయే వరకు ఉండాలి. మరల 50 చేపలను సేకరించి, వాటిలో గుర్తులు కలిగి ఉన్న వాటిని లెక్కించాలి. ఇప్పుడు మనం సేకరించిన దత్తాంశాన్ని విశ్లేషణ చేయగలం.

మన ముఖ్య పరికల్పనయేమనగా చేపలకు గుర్తులు జాగ్రత్తగా ఇవ్వడం, అవి అన్నీ చెరువు అంతటా వ్యాపించేటందుకు తగిన సమయం ఇచ్చి రెండవ నమూనాను సేకరించడం.

సోపానం 3 (గణిత సమస్యను సాధించుట) : సోపానం 2 లో సూక్ష్మీకరించి, మెరుగుపరచిన గణిత సమస్యను వివిధ గణిత సాంకేతిక పద్ధతులను ఉపయోగించి సాధించుట.

సందర్భానుసారంగా, ఉదాహరణకు, సోపానం2 లో రెండవ నమూనా సమూహం నందు 5 చేపలు గుర్తులు కలిగి ఉన్నాయి అనుకుందాం.

అప్పుడు, $\frac{5}{50}$, అనగా, $\frac{1}{10}$ వ భాగం చేపల సంఖ్యకు గుర్తులు ఉన్నట్లు. ఇది మొత్తం జనాభాలో పాక్షికం అనుకుంటే అప్పుడు జనాభాలో $\frac{1}{10}$ వ వంతు $= 20$.

ఆ విధంగా మొత్తం జనాభా $= 20 \times 10 = 200$.

సోపానం 4 (సాధనకు భాష్యం చెప్పటం): క్రిందటి సోపానంలో మనం పొందిన సాధనను గమనించిన, అది సోపానం 1లో ఒక నిజ జీవిత సందర్భంతో ప్రారంభించాం.

ఆ విధంగా సోపానం 3 లో మన సమస్యకు సాధనగా చెరువులోని చేపల సంఖ్య 200గా అంచనా వేయగలిగాం.

సోపానం 5 (నమూనాను ధృవీకరించుట): సాధన కనుగొన్న తరువాత, వాస్తవికతతో సరిపోతుందో లేదో తనిఖీ చేయవలసి ఉంటుంది. సరిపోయింది అనుకుంటే ఈ నమూనాను అనుసరణీయంగా తీసుకుంటాం.లేదంటే పరికల్పనను మార్చుకుంటాం.

మనం తీసుకున్న పరికల్పన సూక్ష్మీకరణలో కొన్నిసార్లు ముఖ్యమైన నిజ సంఘటనలను గణిత విశ్లేషణం చేయునప్పుడు వదిలేసి ఉండవచ్చు. అలాంటి సందర్భంలో చాలా తరుచుగా, సాధన అసంబద్ధంగా, వాస్తవికతకు దూరంగా ఉండవచ్చు. అదే జరిగితే 1వ సోపానంలోని మన పరికల్పనను పరిగణలోకి తీసుకొని, వాస్తవికతకు ఎక్కువ సమీపంలో ఉండునట్లు కొత్త కారకాలను ఎంచుకొని, ముందు గమనించిన లోపాలను సరిదిద్దుకోవాలి.

For instance, in Step 3 we had obtained an estimate of the entire population of fishes. It may not be the actual number of fishes in the pond. We next see whether this is a good estimate of the population by repeating Steps 2 and 3 a few times, and taking the mean of the results obtained. This would give a closer estimate of the population.

Another way of visualising **the process of mathematical modelling** is shown in Fig. A2.1.

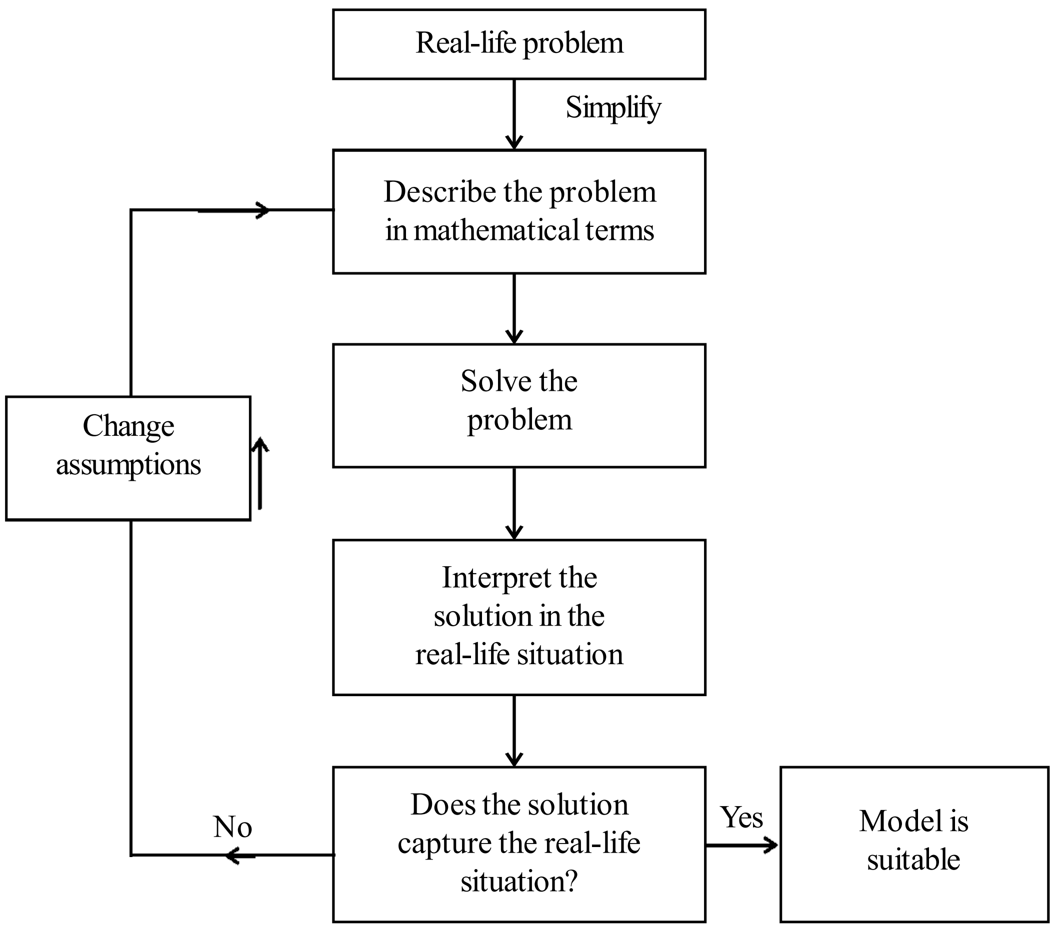
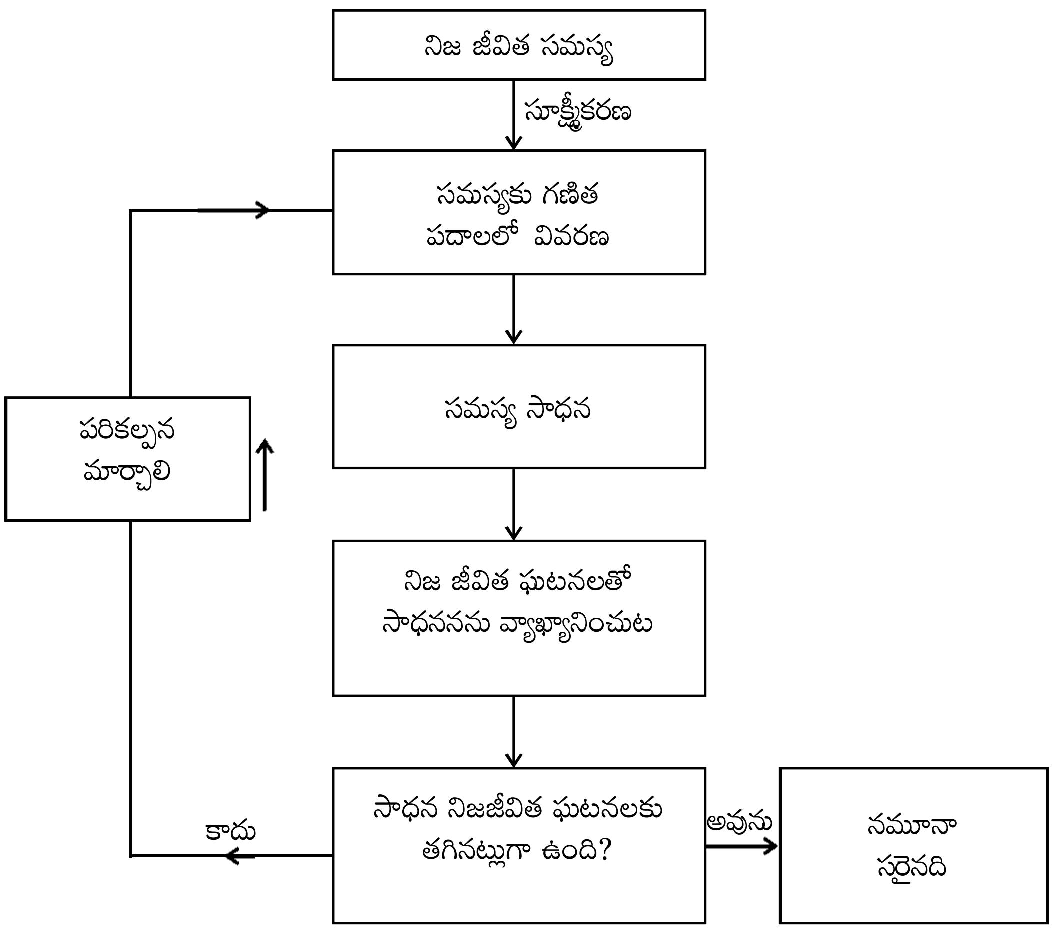


Fig. A2.1

Modellers look for a balance between simplification (for ease of solution) and accuracy. They hope to approximate reality closely enough to make some progress. The best outcome is to be able to predict what will happen, or estimate an outcome, with reasonable accuracy. Remember that different assumptions we use for simplifying the problem can lead to different models. So, there are no perfect models. There are good ones and yet better ones.

ఏలాగంటే సోపానం3 లో మొత్తం చేపల జనాభా గురించి ఒక అంచనా వేశాం. అది వాస్తవంగా చెరువులోని చేపల సంఖ్యకు సరికాకపోవచ్చు. అప్పుడు సోపానం2 మరియు సోపానం3 లను ఇంకొన్నిసార్లు పునరావృతం చేసి, వాటి సగటు నుండి ఫలితాన్ని పొందుతాం. ఈ విధంగా చేయుట వలన వాస్తవ జనాభాకు సమీప సంఖ్యను అంచనా వేయగలం.

గణిత నమూనీకరణ పద్ధతిని పటం A2.1 నందు దృశ్యీకరించటం జరిగింది.



పటం. A2.1

నమూనీకర్త, సరళీకరణ మరియు ఖచ్చితత్వాల మధ్య సమన్వయం ఉండే విధంగా చూడాలి. సుమారు వాస్తవికతకు దగ్గరగా సాధన ఉండేటట్లుగా చేయాలి. అన్నిటికంటే మంచి ఫలితం మాత్రమే రాబోవు ఫలితాన్ని అంచనా వేయగలదు, అనువైన ఖచ్చితత్వంతో మనం సమస్య సాధనకు తీసుకున్న విభిన్న పరికల్పనలు విభిన్న నమూనాలకు దారి చూపవచ్చు అని గుర్తుంచుకోండి. కనుక ఖచ్చితమైన నమూనాలు అంటూ ఏవి ఉండవు. కొన్ని మంచివి ఇంకా కొన్ని ఉన్నతమైనవిగా ఉంటాయి.

EXERCISE A2.1

1. Consider the following situation.

A problem dating back to the early 13th century, posed by Leonardo Fibonacci asks how many rabbits you would have if you started with just two and let them reproduce. Assume that a pair of rabbits produces a pair of offspring each month and that each pair of rabbits produces their first offspring at the age of 2 months. Month by month the number of pairs of rabbits is given by the sum of the rabbits in the two preceding months, except for the 0th and the 1st months.

Month	Pairs of Rabbits
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

After just 16 months, you have nearly 1600 pairs of rabbits!

Clearly state the problem and the different stages of mathematical modelling in this situation.

అభ్యాసం A2.1

1. కింది సంఘటన పరిశీలించండి.

క్రీ.శ. 13వ శతాబ్దపు ప్రారంభం నాటి ప్రశ్న. లియోనార్డో ఫిబోనాకిచే సంధించబడిన సమస్య ఇలా ఉంది: సంతానోత్పత్తి చేయగల సామర్థ్యం గల జత కుందేళ్లను వదిలితే కొంతకాలం తరువాత వాటి సంతానం లెక్కించుట. మొదటి జత నెలకు ఒక కుందేలుకు జన్మనిస్తుంది. పుట్టిన ప్రతి కుందేలు రెండు నెలల తరువాత అది కూడా మరో పిల్లకు జన్మనివ్వగలదు. మొదటి జతకు '0' నెలలుగా పరిగణించి, నెలనెలకు, ప్రతి రెండు నెలలకు కుందేళ్ల సంఖ్యను లెక్కించండి.

నెల	కుందేళ్ల జతలు
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

కేవలం16 నెలల్లో సుమారు 1600 జతల కుందేళ్ళు వచ్చాయి.

ఈ సమస్యను దశలవారీగా, క్షుణ్ణంగా గణిత నమూనీకరణ పద్ధతుల ద్వారా వివరింపుము.

A2.3 Some Illustrations

Let us now consider some examples of mathematical modelling.

Example 1 (Rolling of a pair of dice) : Suppose your teacher challenges you to the following guessing game: She would throw a pair of dice. Before that you need to guess the sum of the numbers that show up on the dice. For every correct answer, you get two points and for every wrong guess you lose two points. What numbers would be the best guess?

Solution :

Step 1 (Understanding the problem) : You need to know a few numbers which have higher chances of showing up.

Step 2 (Mathematical description) : In mathematical terms, the problem translates to finding out the probabilities of the various possible sums of numbers that the dice could show.

We can model the situation very simply by representing a roll of the dice as a random choice of one of the following thirty six pairs of numbers.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

The first number in each pair represents the number showing on the first die, and the second number is the number showing on the second die.

Step 3 (Solving the mathematical problem) : Summing the numbers in each pair above, we find that possible sums are 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 and 12. We have to find the probability for each of them, assuming all 36 pairs are equally likely.

We do this in the following table.

Sum	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probability	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Observe that the chance of getting a sum of a seven is 1/6, which is larger than the chances of getting other numbers as sums.

A 2.3 మరికొన్ని ఉదాహరణలు

గణిత నమూనీకరణకు సంబంధించి కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 1 (ఒక జత పాచికలను దొర్లించుట) : మీ ఉపాధ్యాయుడు/ఉపాధ్యాయురాలు, మీరు ఊహించి చెప్పే సవాలును సంధించారనుకొనుము. అతను/ఆమె ఒక జత పాచికలను ఒకే సారి దొర్లిస్తారు. వారు దొర్లించక ముందే మీరు, పై పాచికల ముఖాలపై కనిపించగల రెండు అంకెల మొత్తం ఊహించాలి. ప్రతి సరైన సమాధానానికి 2 పాయింట్లు ఇట్లేపడతాయి, తప్పు సమాధానానికి 2పాయింట్లు తీసివేయబడతాయి. మీ యొక్క ఉత్తమ అంచనా సంఖ్య ఏమిటి?

సాధన :

సోపానం 1 (సమస్యను అవగాహన చేసుకొనుట) : అధికంగా కనిపించే సంఖ్యలు గల వాటిని కొన్నింటిని గురించి మీరు తెలుసుకోవాలి.

సోపానం 2 (గణిత వివరణ) : గణిత పరిభాషలో సమస్యను ప్రతిబింబించే వివిధ అంకెల మొత్తాల సంభావ్యతల గురించి తెలుసుకోవాలి.

మనం చాలా సరళంగా నమూనాలో పాచికలను దొర్లించినప్పుడు సంభవించే మొత్తం ఘటనలు 36 గా క్రింది విధంగా ఉండవచ్చు.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ప్రతి జతలోనూ మొదటి అంకె మొదటి పాచిక పై గల అంకెను, రెండవ అంకె రెండవ పాచిక పై గల అంకెను సూచిస్తుంది.

సోపానం 3 (గణిత సమస్యను సాధించుట) : పై జతలలో ప్రతి జతలోని అంకెలను కలుపుట ద్వారా 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 మరియు 12 అను సంఖ్యలను మనం పొందగలం. 36 ఘటనలను, సమసంభవ ఘటనలుగా ఊహించి మనం కింది సంభావ్యతలను పొందుతాం.

కింది పట్టికలో వాటి సంభావ్యతలను నమోదు చేద్దాం.

మొత్తం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

పై పట్టికను పరిశీలించిన, మొత్తం 7 పొందే సంభావ్యత $1/6$ ను అత్యధిక సంభావ్యతగా గమనించగలం.

Step 4 (Interpreting the solution) : Since the probability of getting the sum 7 is the highest, you should repeatedly guess the number seven.

Step 5 (Validating the model) : Toss a pair of dice a large number of times and prepare a relative frequency table. Compare the relative frequencies with the corresponding probabilities. If these are not close, then possibly the dice are biased. Then, we could obtain data to evaluate the number towards which the bias is.

Before going to the next example, you may need some background.

Not having the money you want when you need it, is a common experience for many people. Whether it is having enough money for buying essentials for daily living, or for buying comforts, we always require money. To enable the customers with limited funds to purchase goods like scooters, refrigerators, televisions, cars, etc., a scheme known as an *instalment scheme* (*or plan*) is introduced by traders.

Sometimes a trader introduces an *instalment* scheme as a marketing strategy to allure customers to purchase these articles. Under the instalment scheme, the customer is not required to make full payment of the article at the time of buying it. She/he is allowed to pay a part of it at the time of purchase, and the rest can be paid in instalments, which could be monthly, quarterly, half-yearly, or even yearly. Of course, the buyer will have to pay more in the instalment plan, because the seller is going to charge some interest on account of the payment made at a later date (called *deferred payment*).

Before we take a few examples to understand the instalment scheme, let us understand the most frequently used terms related to this concept.

The *cash price* of an article is the amount which a customer has to pay as full payment of the article at the time it is purchased. *Cash down payment* is the amount which a customer has to pay as part payment of the price of an article at the time of purchase.

Remark : If the instalment scheme is such that the remaining payment is completely made within one year of the purchase of the article, then simple interest is charged on the deferred payment.

> In the past, charging interest on borrowed money was often considered evil, and, in particular, was long prohibited. One way people got around the law against paying interest was to borrow in one currency and repay in another, the interest being disguised in the exchange rate.

Let us now come to a related mathematical modelling problem.

సోపానం 4 (సాధనను వ్యాఖ్యానించుట) : రెండు పై ముఖాల మీది అంకెల మొత్తం 7 అయ్యే సంభావ్యత ఎక్కువగా ఉన్నందున, మీరు మళ్ళీ మళ్ళీ 7నే అంచనా వేయగలరు.

సోపానం 5 (సాధనను ధ్రువీకరించుట) : ఒక జత పాచికలను తీసుకుని ఎక్కువసార్లు వాటిని దొర్లించి సాపేక్ష పౌన:పున్య పట్టికను తయారు చేయండి. ఈ సాపేక్ష పౌన:పున్యాలను వాటి సంభావ్యతలతో పోల్చండి. ఈ సారూప్యత అతి దగ్గరగా లేకుంటే, బహుశా ఆ పాచికలు సమసంభవ ఘటనలు కలిగి లేవు అని ఊహించాలి.

మరొక ఉదాహరణకు వెళ్లే ముందు,మీరు పూర్వాపరాల గురించి మరికొంత తెలుసుకోవాలి.

ఒక వస్తువుని కొనుగోలు చేయుటకు సరిపడా డబ్బు లేని స్థితి అనేది చాలామందికి ఒక సాధారణ అనుభవం. దైనందిన వస్తు సామాగ్రి కానీ, విలాస వస్తువులైన కానీ, వాటిని కొనాలంటే మనకు ఎల్లప్పుడూ డబ్బు ముఖ్యం. స్కూటర్, రిఫ్రిజిరేటర్, టెలివిజన్ లేక కారు వంటి వస్తువులు కొనడానికి కొనుగోలుదారుని వద్ద పరిమిత మొత్తంలో మాత్రమే డబ్బు ఉన్నప్పుడు, వ్యాపారస్తుడు తన వ్యాపార అభివృద్ధి కొరకు వాయిదా పద్ధతిని ప్రతిపాదిస్తాడు.

కొన్ని సందర్భాలలో వ్యాపారాభివృద్ధి నైపుణ్యంలో భాగంగా కొనుగోలుదారున్ని ఆకర్షించేందుకు కూడా వాయిదా పద్ధతి స్కీంలను ప్రచారం చేసుకుంటారు. అలాంటి స్కీంలలో కొనుగోలుదారుడు వస్తువు యొక్క మొత్తం ఖరీదును ఒకేసారి చెల్లించకుండా వస్తువును కొనగలడు. అతను/ఆమె తన వద్ద ఉన్న డబ్బు చెల్లించి, మిగిలినది వాయిదా పద్ధతిలో చెల్లించాలి, అదీ నెలవారి, త్రైమాసిక, అర్ధ సంవత్సర లేక సంవత్సరానికి ఒకసారి వంతున. ఏది ఏమైనప్పటికీ కొనుగోలుదారుడు ఈ విధానంలో వస్తువు అసలు ధర కంటే కొంత ఎక్కువ చెల్లిస్తాడు.ఎందుకంటే వ్యాపారి కొంత మొత్తాన్ని వడ్డీగా తీసుకుంటాడు. దీనిని "వ్యత్యాస చెల్లింపు" అంటారు.

వాయిదా పద్ధతుల స్కీంగురించి అర్థం చేసుకొనుటకు, కొత్త ఉదాహరణకు వెళ్లే ముందు ఈ భావనకు సంబంధించి అతి తరచుగా వాడబడే కొన్ని పదాల గురించి అవగాహన పొందుదాం.

కొనుగోలుదారుడు వస్తువును పొందుటకు వ్యాపారికి చెల్లించవలసిన దానిని "నగదు ధర" గా వర్ణిస్తాం. కొనుగోలుదారుడు స్కీంలో చేరి, వస్తువును తీసుకెళ్లేటప్పుడు చెల్లించే దానిని "డౌన్ పేమెంట్ లేక మొదటి వాయిదా" అంటాం.

వ్యాఖ్య : వాయిదాల పద్ధతిలో మిగిలిన సొమ్ము ఒక సంవత్సరం లోపు చెల్లించినచో తేడా సొమ్ము పై బారువడ్డీ లెక్కన వసూలు చేస్తారు.

> పూర్వకాలంలో అప్పు తీసుకున్న సొమ్ముకు వడ్డీ తీసుకొనుట నేరము, పాపముగా పరిగణించి, చాలా కాలం నిషేధించారు కూడా. మరో మార్గంలో ప్రజలు అప్పు తీసుకొని, వడ్డీగా డబ్బుకు మారుగా వేరే వస్తువులు కూడా మార్చుకునేవారు.

ఇప్పుడు గణిత నమూనీకరణ సమస్యకు సంబంధించి చర్చిద్దాం.

Example 2 : Juhi wants to buy a bicycle. She goes to the market and finds that the bicycle she likes is available for ₹ 1800. Juhi has ₹ 600 with her. So, she tells the shopkeeper that she would not be able to buy it. The shopkeeper, after a bit of calculation, makes the following offer. He tells Juhi that she could take the bicycle by making a payment of ₹ 600 cash down and the remaining money could be made in two monthly instalments of ₹ 610 each. Juhi has two options one is to go for instalment scheme or to make cash payment by taking loan from a bank which is available at the rate of 10% per annum simple interest. Which option is more economical to her?

Solution :

Step 1 (Understanding the problem) : What Juhi needs to determine is whether she should take the offer made by the shopkeeper or not. For this, she should know the two rates of interest— one charged in the instalment scheme and the other charged by the bank (i.e., 10%).

Step 2 (Mathematical description) : In order to accept or reject the scheme, she needs to determine the interest that the shopkeeper is charging in comparison to the bank. Observe that since the entire money shall be paid in less than a year, simple interest shall be charged.

We know that the cash price of the bicycle = ₹ 1800.

Also, the cashdown payment under the instalment scheme = ₹ 600.

So, the balance price that needs to be paid in the instalment scheme = ₹ (1800 – 600) = ₹ 1200.

Let r % per annum be the rate of interest charged by the shopkeeper.

Amount of each instalment = ₹ 610

Amount paid in instalments = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

Interest paid in instalment scheme = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

Since, Juhi kept a sum of ₹ 1200 for one month, therefore,

Principal for the first month = ₹ 1200

Principal for the second month = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

Balance of the second principal ₹ 590 + interest charged (₹ 20) = monthly instalment (₹ 610) = 2nd instalment

So, the total principal for one month = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

Now, $$\text{interest} = ₹\ \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} \qquad (2)$$

ఉదాహరణ 2 : జుహీ అనే అమ్మాయి, ఒక సైకిల్ కొనాలని అనుకుంది. సైకిల్ షాప్ నందు తనకు నచ్చిన సైకిల్ ఖరీదు ₹1800 అని తెలుసుకున్నది. కానీ ఆమె వద్ద ₹600 మాత్రమే ఉన్నాయి. తాను సైకిల్ కొనలేదన్న విషయం ఆమె షాపు యజమానికి చెప్పింది. షాపు యజమాని ఏవో లెక్కలు వేసుకుని ఒక ప్రతిపాదన చేశాడు. డౌన్ పేమెంట్ గా ₹ 600 చెల్లించి, మిగిలిన మొత్తాన్ని రెండు సమాన నెలసరి వాయిదాలలో ₹610 వంతున చెల్లించమని సూచించాడు. జూహికి రెండు మార్గాలు ఉన్నాయి. ఒకటి వాయిదాల పద్ధతి. రెండవది, బ్యాంకు నుండి 10% బారు వడ్డీతో అప్పు తీసుకొని సైకిల్ కొనడం. ఈ రెండు విధానాలలో ఏ విధానం ఆమెకు లాభదాయకం?

సాధన :

సోపానం 1 (సమస్యను అవగాహన చేసుకొనుట) : షాపు యజమాని సూచించిన ప్రతిపాదన జూహీ అంగీకరించాలా లేదా అన్నది ప్రశ్న. దాని కొరకు ఆమె రెండు విధానాలలో చెల్లించబోవు మొత్తానికి వడ్డీ శాతంను అంచనా వేసి సరి పోల్చుకోవాలి .ఒకటి వాయిదాల చెల్లింపు, రెండవది బ్యాంకు వారికి చెల్లింపు(10%).

సోపానం 2 (గణిత వివరణ) : షాపు వాని ప్రతిపాదనను స్వీకరించాలా లేదా అనేందుకు, వాయిదా పద్ధతిలో చెల్లింపుకు వడ్డీ రేటు ఎంత అవుతుందో తెలుసుకొని బ్యాంకు రేటుతో సరిపోల్చుకోవాలి.

మనకు తెలిసిన సైకిలు నగదు ధర = ₹ 1800.

స్కీం లో చేరేప్పుడు చెల్లించాల్సిన 'డౌన్ పేమెంట్' సొమ్ము = ₹ 600.

వాయిదాలలో చెల్లించాల్సిన మిగులు సొమ్ము = ₹ (1800 – 600) = ₹ 1200.

షాపు యజమాని వేసిన వడ్డీ రేటు సంవత్సరానికి r % అనుకొనిన,

ప్రతి వాయిదాకు చెల్లించాల్సిన సొమ్ము = ₹ 610

మొత్తం రెండు వాయిదాలలో చెల్లింపు = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

వాయిదా పద్ధతిలో చెల్లిస్తున్న వడ్డీ సొమ్ము = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

జుహీ ₹1200 ను ఒక నెలపాటు ఉంచుకున్నందున

మొదటి నెలకు అసలు = ₹ 1200

రెండవ నెలకు అసలు = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

రెండవ నెల అసలు ₹ 590 + వడ్డీ (₹ 20) = 2వ వాయిదా సొమ్ము (₹ 610)

కావున ఒక నెలకు మొత్తం అసలు = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

అప్పుడు,
$$\text{వడ్డీ} = ₹\ \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} \qquad (2)$$

Step 3 (Solving the problem) : From (1) and (2)

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

or $$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (approx.)}$$

Step 4 (Interpreting the solution) : The rate of interest charged in the instalment scheme = 13.14 %.

The rate of interest charged by the bank = 10%

So, she should prefer to borrow the money from the bank to buy the bicycle which is more economical.

Step 5 (Validating the model) : This stage in this case is not of much importance here as the numbers are fixed. However, if the formalities for taking loan from the bank such as cost of stamp paper, etc., which make the effective interest rate more than what it is the instalment scheme, then she may change her opinion.

Remark : Interest rate modelling is still at its early stages and validation is still a problem of financial markets. In case, different interest rates are incorporated in fixing instalments, validation becomes an important problem.

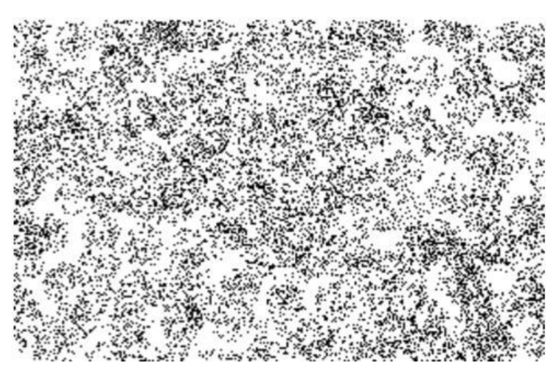
EXERCISE A2.2

In each of the problems below, show the different stages of mathematical modelling for solving the problems.

1. An ornithologist wants to estimate the number of parrots in a large field. She uses a net to catch some, and catches 32 parrots, which she rings and sets free. The following week she manages to net 40 parrots, of which 8 are ringed.

(i) What fraction of her second catch is ringed?

(ii) Find an estimate of the total number of parrots in the field.



2. Suppose the adjoining figure represents an aerial photograph of a forest with each dot representing a tree. Your purpose is to find the number of trees there are on this tract of land as part of an environmental census.

సోపానం 3 (సమస్యలు సాధించుట) : (1) మరియు (2)ల నుండి

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

లేదా
$$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (సుమారుగా)}$$

సోపానం 4 (సాధనకు భాష్యం చెప్పుట) : స్కీంలో వాయిదా పద్ధతిన చెల్లించవలసిన వడ్డీ రేటు = 13.14 %.

బ్యాంకు కు చెల్లించవలసిన వడ్డీ రేటు = 10%

కావున, జూహి బ్యాంకు ద్వారా అప్పు తీసుకొని సైకిల్ కొనుట ఆమెకు లాభదాయకం.

సోపానం 5 (నమూనాలు ధ్రువీకరించుట) : నిర్దిష్ట సంఖ్యలతో కూడినది అయినందున ఈ స్థితిలో ధ్రువీకరణ ఆవశ్యకత అంతగా అవసరం రాదు. అయినప్పటికీ,ఆమె బ్యాంకు వారికి కొన్ని ఆధార పత్రాలు సమర్పించుటకు అయ్యే ఖర్చు, శ్రమను లెక్కలోకి తీసుకున్నప్పుడు స్కీము కంటే ఎక్కువే అవుతుంది అనుకుంటే ఆమె ప్రాధాన్యతను మార్చుకోవచ్చు.

వ్యాఖ్యానం : వడ్డీ రేటు నమూనా మరియు ధ్రువీకరణ అనేది ఆర్థిక మార్కెట్ రంగ సమస్య . వేర్వేరు బ్యాంకులు వేర్వేరు రకాల వడ్డీ రేట్లు ప్రతిపాదించిన సందర్భంలో ధ్రువీకరణ ప్రాముఖ్యతను సంతరించుకొనును.

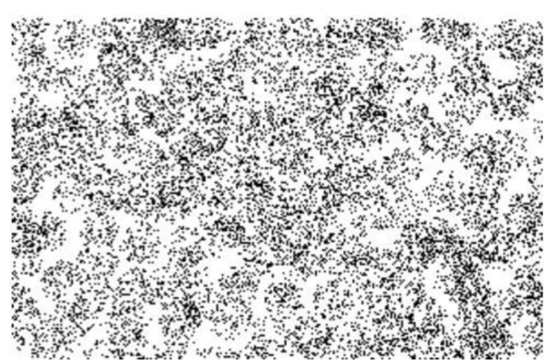
అభ్యాసం A2.2

క్రింద ఇవ్వబడిన సమస్యలకు గణిత నమూనాలు అనుసరించి సాధించడంలోని వేరువేరు దశలను సూచించుము:

1. ఒక పక్షి శాస్త్రవేత్త పెద్ద అటవీ ప్రాంతంలో ఉండే చిలుకల సంఖ్యను అంచనా వేయాలి అనుకున్నారు. ఆమె వలవేసి 32 చిలుకలను పట్టుకొని, వాటి కాళ్లకు ఉంగరాలు అమర్చి, వాటిని స్వేచ్ఛగా విడిచిపెట్టారు. కొంతకాలం తరువాత వలవేసి 40 చిలుకలను పట్టగా అందులో 8 చిలకలకు ఉంగరాలు ఉన్నాయి.

(i) రెండవసారి పట్టుకున్న వాటిలో ఉంగరాలు ఉన్న వాటి సంఖ్యను భిన్నంతో చూపండి?

(ii) మొత్తం విస్తీర్ణంలో ఉన్న చిలుకల సంఖ్యను అంచనా వేయండి?



2. ప్రక్కపటం ఆకాశం నుండి తీసిన ఛాయాచిత్రం. అందులో కనిపించే ప్రతి చుక్క (బిందువు), ఒక వృక్షాన్ని సూచిస్తుందనుకోండి. పర్యావరవరణం లెక్కింపులో భాగంగా ఈ నిర్దేశించిన విస్తీర్ణంలోని చెట్ల సంఖ్యను అంచనా వేసి చెప్పండి.

3. A T.V. can be purchased for ₹ 24000 cash or for ₹ 8000 cashdown payment and six monthly instalments of ₹ 2800 each. Ali goes to market to buy a T.V., and he has ₹ 8000 with him. He has now two options. One is to buy TV under instalment scheme or to make cash payment by taking loan from some financial society. The society charges simple interest at the rate of 18% per annum simple interest. Which option is better for Ali?

A2.4 Why is Mathematical Modelling Important?

As we have seen in the examples, mathematical modelling is an interdisciplinary subject. Mathematicians and specialists in other fields share their knowledge and expertise to improve existing products, develop better ones, or predict the behaviour of certain products.

There are, of course, many specific reasons for the importance of modelling, but most are related in some ways to the following :

- *To gain understanding.* If we have a mathematical model which reflects the essential behaviour of a real-world system of interest, we can understand that system better through an analysis of the model. Furthermore, in the process of building the model we find out which factors are most important in the system, and how the different aspects of the system are related.

- *To predict, or forecast, or simulate.* Very often, we wish to know what a real-world system will do in the future, but it is expensive, impractical or impossible to experiment directly with the system. For example, in weather prediction, to study drug efficacy in humans, finding an optimum design of a nuclear reactor, and so on.

  Forecasting is very important in many types of organisations, since predictions of future events have to be incorporated into the decision-making process. For example:

  In marketing departments, reliable forecasts of demand help in planning of the sale strategies.

  A school board needs to able to forecast the increase in the number of school going children in various districts so as to decide where and when to start new schools.

  Most often, forecasters use the past data to predict the future. They first analyse the data in order to identify a pattern that can describe it. Then this data and pattern is extended into the future in order to prepare a forecast. This basic strategy is employed in most forecasting techniques, and is based on the assumption that the pattern that has been identified will continue in the future also.

3. ₹ 24000 ఒకేసారి చెల్లించి గాని, ₹ 8000 మొదటి వాయిదా చెల్లించి మిగిలిన సొమ్మును ఆరు నెలల వాయిదాలలో, ప్రతి వాయిదాకు ₹2800 చొప్పున చెల్లించడం ద్వారా గాని, టీ.వీ. ని కొనుగోలు చేయవచ్చు. అలీ ₹ 8000 తీసుకుని టీ.వీ. కొనుటకు వెళ్లాడు. అతనికి రెండు అవకాశాలు ఉన్నాయి. ఒకటి వాయిదా పద్ధతిన స్కీములో తీసుకోవడం, రెండు ఒక ఆర్థిక వ్యాపార సంఘం ద్వారా అప్పు తీసుకోవడం. ఆ వ్యాపార సంఘం వారు బారు వడ్డీ చొప్పున సంవత్సరానికి 18% రేటున వడ్డీ తీసుకుంటారు. ఈ రెండు అవకాశములలో అలీకి ఏది లాభదాయకం?

A 2.4 "గణిత నమూనా ఎందుకు ముఖ్యమైనది?"

మనం చూసిన ఉదాహరణను బట్టి గణిత నమూనా అనేది అంత: క్రమశిక్షణ గల విభాగము అని చెప్పవచ్చు. గణిత శాస్త్రవేత్తలు మరియు ఇతర రంగాలలోని ప్రముఖులు వారి యొక్క విజ్ఞానాన్ని మరియు అనుభవాన్ని ఉన్న ఉత్పత్తులను మెరుగుపరచుటకు, మంచి వాటిని అభివృద్ధి చేయుట లేదా కొన్ని ఉత్పత్తుల లక్షణాల గురించి ముందుగా ఊహించుటకు ఉపయోగిస్తారు.

గణిత నమూనా ప్రాముఖ్యతకు చాలా ప్రత్యేకతలు ఉన్నాయని చెప్పవచ్చు. వాటిలో చాలా వరకు, ఏదో విధంగా క్రింది వాటికి సంబంధించి ఉంటాయి :

- *అవగాహన పెంపొందించుకొనుట.* గణిత నమూనాను మనం కలిగి ఉంటే, వాస్తవిక ప్రాపంచిక వ్యవస్థ యొక్క అవసరత యొక్క ప్రముఖ స్వభావాన్ని ప్రతిబింబచేసే నమూనా యొక్క విశ్లేషణ ద్వారా వ్యవస్థ యొక్క స్వభావాన్ని అవగాహన చేసుకోగలం. ఇంకా స్పష్టంగా చెప్పాలంటే, నమూనాలు అభివృద్ధి చేసే క్రమంలో విభిన్న పరిస్థితులకు సంబంధించిన అనేక కారకాలను కనుగొంటాం.
- *అంచనా వేయుటకు, లేక దీర్ఘ దృష్టికి, లేక అనుకరణకు:* నిజ ప్రాపంచిక వ్యవస్థ భవిష్యత్తులో ఏమి చేయబోతుంది అని తెలుసుకొనుట గురించి మనం చాలా తరచుగా అభిలషిస్తాము, కానీ వ్యవస్థతో ప్రత్యక్షంగా ప్రయోగం చేయడం అనేది ఖర్చుతో కూడుకున్నది, ఆచరణీయం కానిది లేక అసాధ్యమైనది. ఉదాహరణకు వాతావరణం అంచనా, మానవునిపై మందుల యొక్క సామర్థ్యం అధ్యయనం చేయుట, న్యూక్లియర్ రియాక్టర్ యొక్క అత్యుత్తమ నమూనా(డిజైన్) కనుగొనుట మొదలైనవి.

  అనేక రకాల సంస్థలకు" దీర్ఘ దృష్టి"చాలా అవసరం. ఎలా అనగా, భవిష్యత్తు అవసరాలను అంచనా వేసి ఆయా సందర్భాల్లో నిర్ణయాలు చేసే క్రమంలో అమలుపరచి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు:

  మార్కెటింగ్ శాఖ వారు వినియోగదారుని అవసరాలను అంచనా వేయుట ద్వారా వ్యాపార లావాదేవీలు నిర్ణయించుకుంటారు.

  పాఠశాల యాజమాన్యం వారు జిల్లాలోని వివిధ ప్రాంతాలలో పాఠశాలకు వెళ్లే వయసు గల పిల్లల సంఖ్యను అంచనా వేయుట ద్వారా నూతన పాఠశాలలను ఎక్కడ స్థాపించాలో నిర్ణయిస్తారు.

  చాలా సందర్భాలలో దీర్ఘ దృష్టి పరులు పాత దత్తాంశాన్ని పరిశీలించి భవిష్యత్తును అంచనా వేస్తారు. వారు ముందుగా దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించి, సరియైన పద్ధతిని గుర్తించి, దాని గురించి వివరణ చేస్తారు. అప్పుడు ఈ దత్తాంశం, అనుక్రమనీయత భవిష్యత్తు ప్రణాళిక తయారీ మరియు ప్రచారానికి దోహదపడుతుంది. ఈ ప్రాథమిక వ్యూహం వల్ల, ముందు జాగ్రత్త చర్యలు అమలుపరచుట ద్వారా మరియు దాని ఆధారిత ప్రతిపాదన సరళిని గుర్తించి, భవిష్యత్తులో కొనసాగించే విధంగా చేయవచ్చు.

- *To estimate.* Often, we need to estimate large values. You've seen examples of the trees in a forest, fish in a lake, etc. For another example, before elections, the contesting parties want to predict the probability of their party winning the elections. In particular, they want to estimate how many people in their constituency would vote for their party. Based on their predictions, they may want to decide on the campaign strategy. Exit polls have been used widely to predict the number of seats, a party is expected to get in elections.

EXERCISE A2.3

1. Based upon the data of the past five years, try and forecast the average percentage of marks in Mathematics that your school would obtain in the Class X board examination at the end of the year.

A2.5 Summary

In this Appendix, you have studied the following points :

1. A mathematical model is a mathematical description of a real-life situation. Mathematical modelling is the process of creating a mathematical model, solving it and using it to understand the real-life problem.

2. The various steps involved in modelling are : understanding the problem, formulating the mathematical model, solving it, interpreting it in the real-life situation, and, most importantly, validating the model.

3. Developed some mathematical models.

4. The importance of mathematical modelling.

- *అంచనా వేయుట:* మనం తరచూ పెద్ద పెద్ద విలువలను అంచనా వేయవలసి ఉంటుంది. అడవిలోని చెట్లు, చెరువులోని చేపలను అంచనా వేయడం లాంటి ఉదాహరణలు మీరు చూసే ఉన్నారు. మరొక ఉదాహరణ, ఎన్నికలకు ముందు పోటీలో నిలబడు పార్టీ వారు, తమ యొక్క గెలుపు సంభావ్యతను ముందుగా అంచనా వేసుకుంటారు. ప్రత్యేకించి తమ నియోజకవర్గంలో ఎంత మంది ప్రజలు తమ పార్టీకి ఓటు వేస్తారో తెలుసుకుంటారు. దానిని ఆధారంగా చేసుకుని తమ ప్రచార వ్యూహాన్ని నిర్ణయించుకుంటారు. ఎన్నికలలో తమ పార్టీకి ఎన్ని స్థానాలు వస్తాయో అనేది విస్తృతంగా ఎగ్జిట్ పోల్ నిర్వహించి అంచనా వేస్తారు.

అభ్యాసం A2.3

1. గత 5 సంవత్సరాల పదవ తరగతి ఉత్తీర్ణత దత్తాంశాలను పరిశీలించి, ఈ విద్యా సంవత్సరంలో నిర్వహించబడే 10వ తరగతి పబ్లిక్ పరీక్షలో మీ పాఠశాల యొక్క గణిత ఉత్తీర్ణతా శాతాన్ని అంచనా వేయడానికి ప్రయత్నించండి.

A 2.5 సారాంశం

ఈ అనుబంధంలో, కింది అంశాలను అధ్యయనం చేసి ఉన్నాం:

1. గణిత నమూనా అనేది నిజ జీవిత ఘటనకు గణితాత్మక వివరణ. గణిత నమూనా అనేది గణిత నమూనాలు సృష్టించే ప్రక్రియ, దానిని ఉపయోగించి నిజ జీవిత సమస్యను అవగాహన చేసుకుని సాధన కనుగొనటం.

2. గణిత నమూనాలోని వివిధ సోపానాలు: సమస్యను అవగాహన చేసుకొనడం, గణిత నమూనాను సూత్రీకరించడం, దానిని సాధించడం, నిజ జీవిత సంఘటనతో వ్యాఖ్యానించుట మరియు నమూనాను ధ్రువీకరించుట అనేవి అతి ముఖ్యమైనవి.

3. కొన్ని గణిత నమూనాలు అభివృద్ధి చేయబడినవి.

4. గణిత నమూనా యొక్క ప్రాముఖ్యత.

ANSWERS/HINTS

EXERCISE 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$

2. 0 **3.** $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$ **4.** $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \cot\theta = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$ **8.** Yes

9. (i) 1 (ii) 0 **10.** $\sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}, \tan P = \frac{12}{5}$

11. (i) False (ii) True (iii) False (iv) False (v) False

సమాధానాలు / సూచనలు

అభ్యాసం 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$

2. 0 **3.** $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$ **4.** $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \cot\theta = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$ **8.** అవును

9. (i) 1 (ii) 0 **10.** $\sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}, \tan P = \frac{12}{5}$

11. (i) తప్పు (ii) ఒప్పు (iii) తప్పు (iv) తప్పు (v) తప్పు

EXERCISE 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\frac{67}{12}$

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C **3.** $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$

4. (i) False (ii) True (iii) False (iv) False (v) True

EXERCISE 8.3

1. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A = \frac{1}{\cot A}$, $\sec A = \frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cos A = \frac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

EXERCISE 9.1

1. 10 m **2.** $8\sqrt{3}$ m **3.** 3 m, $2\sqrt{3}$ m **4.** $10\sqrt{3}$ m

5. $40\sqrt{3}$ m **6.** $19\sqrt{3}$ m **7.** $20(\sqrt{3}-1)$ m **8.** $0.8(\sqrt{3}+1)$ m

9. $16\frac{2}{3}$ m **10.** $20\sqrt{3}$ m, 20 m, 60 m **11.** $10\sqrt{3}$ m, 10 m **12.** $7(\sqrt{3}+1)$ m

13. $75(\sqrt{3}-1)$ m **14.** $58\sqrt{3}$ m **15.** 3 seconds

EXERCISE 10.1

1. Infinitely many

2. (i) One (ii) Secant (iii) Two (iv) Point of contact **3.** D

EXERCISE 10.2

1. A **2.** B **3.** A **6.** 3 cm

7. 8 cm **12.** AB = 15 cm, AC = 13 cm

అభ్యాసం 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\frac{67}{12}$

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C **3.** $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$

4. (i) తప్పు (ii) ఒప్పు (iii) తప్పు (iv) తప్పు (v) ఒప్పు

అభ్యాసం 8.3

1. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A = \frac{1}{\cot A}$, $\sec A = \frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cos A = \frac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

   $\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

అభ్యాసం 9.1

1. 10 మీ **2.** $8\sqrt{3}$ మీ. **3.** 3m, $2\sqrt{3}$ మీ **4.** $10\sqrt{3}$ మీ

5. $40\sqrt{3}$ మీ **6.** $19\sqrt{3}$ మీ **7.** $20\ \sqrt{3} - 1$ మీ **8.** $0.8\ \sqrt{3}\quad 1$ మీ

9. $16\frac{2}{3}$ మీ **10.** $20\sqrt{3}$ మీ, 20 మీ, 60 మీ **11.** $10\sqrt{3}$ మీ, 10 మీ **12.** $7\ \sqrt{3}\quad 1$ మీ

13. $75(\sqrt{3}-1)$మీ **14.** $58\sqrt{3}$ మీ **15.** 3 సెకన్లు

అభ్యాసం 10.1

1. అనంతం

2. (i) ఒకటి (ii) ఛేదన రేఖ (iii) రెండు (iv) స్పర్శ బిందువు **3.** D

అభ్యాసం 10.2

1. A **2.** B **3.** A **6.** 3 సెం.మీ.

7. 8 సెం.మీ. **12.** AB = 15 సెం.మీ., AC = 13 సెం.మీ.

EXERCISE 11.1

1. $\frac{132}{7}\text{cm}^2$ **2.** $\frac{77}{8}\text{cm}^2$ **3.** $\frac{154}{3}\text{cm}^2$

4. (i) 28.5 cm^2 (ii) 235.5 cm^2

5. (i) 22 cm (ii) 231 cm^2 (iii) $\left(231-\frac{441\sqrt{3}}{4}\right)\text{cm}^2$

6. 20.4375 cm^2 ; 686.0625 cm^2 **7.** 88.44 cm^2

8. (i) 19.625 m^2 (ii) 58.875 cm^2 **9.** (i) 285 mm (ii) $\frac{385}{4}\text{ mm}^2$

10. $\frac{22275}{28}\text{ cm}^2$ **11.** $\frac{158125}{126}\text{ cm}^2$ **12.** 189.97 km^2

13. ₹ 162.68 **14.** D

EXERCISE 12.1

1. 160 cm^2 **2.** 572 cm^2 **3.** 214.5 cm^2

4. Greatest diameter = 7 cm,surface area = 332.5 cm^2

5. $\frac{1}{4}l^2\ (\pi+24)$ **6.** 220 mm^2 **7.** 44 m^2, ₹ 22000

8. 18 cm^2 **9.** 374 cm^2

EXERCISE 12.2

1. π cm^3

2. 66 cm^3. Volume of the air inside the model = Volume of air inside (cone + cylinder + cone) $=\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1+\pi r^2 h_2+\frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$, where r is the radius of the cone and the cylinder, h_1 is the height (length) of the cone and h_2 is the height (length) of the cylinder.

Required Volume $=\frac{1}{3}\pi r^2\left(h_1+3h_2+h_1\right)$.

3. 338 cm^3 **4.** 523.53 cm^3 **5.** 100 **6.** 892.26 kg

7. 1.131 m^3 (approx.)**8.** Not correct. Correct answer is 346.51 cm^3.

అభ్యాసం 11.1

1. $\frac{132}{7}$ సెం.మీ^{2} **2.** $\frac{77}{8}$ సెం.మీ^{2} **3.** $\frac{154}{3}$ సెం.మీ^{2}

4. (i) 28.5 సెం.మీ.^{2} (ii) 235.5 సెం.మీ.^{2}

5. (i) 22 సెం.మీ. (ii) 231 సెం.మీ.^{2} (iii) $\left(231-\frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ సెం.మీ^{2}

6. 20.4375 సెం.మీ.^{2} ; 686.0625 సెం.మీ.^{2} **7.** 88.44 సెం.మీ.^{2}

8. (i) 19.625 మీ^{2} (ii) 58.875 సెం.మీ^{2} **9.** (i) 285 మి.మీ. (ii) $\frac{385}{4}$ మి.మీ^{2}

10. $\frac{22275}{28}$ సెం.మీ^{2} **11.** $\frac{158125}{126}$ సెం.మీ$^{2\,3}$ **12.** 189.97 కి.మీ^{2}

13. ₹ 162.68 **14.** D

అభ్యాసం 12.1

1. 160 సెం.మీ^{2} **2.** 572 సెం.మీ^{2} **3.** 214.5 సెం.మీ^{2}

4. గరిష్ఠ వ్యాసం = 7 సెం.మీ, ఉపరితల వైశాల్యం = 332.5 సెం.మీ^{2}

5. $\frac{1}{4}l^2(\pi+24)$ **6.** 220 మి.మీ^{2} **7.** 44 మీ^{2}, ₹ 22000

8. 18 సెం.మీ^{2} **9.** 374 సెం.మీ^{2}

అభ్యాసం 12.2

1. π సెం.మీ^{3}

2. 66 సెం.మీ^{3}. నమూనా లోపలివైపు గాలి ఘనపరిమాణం = లోపలిగాలి ఘనపరిమాణం (శంకువు + స్థూపం + శంకువు) $=\left(\frac{1}{3}\pi r^2h_1+\pi r^2h_2+\frac{1}{3}\pi r^2h_1\right)$, ఇక్కడ r అనగా శంకువు మరియు స్థూపంల వ్యాసార్ధం, h_1 అనగా శంకువు ఎత్తు (పొడవు), h_2 అనగా స్థూపం ఎత్తు (పొడవు); కావాల్సిన ఘనపరిమాణం $=\frac{1}{3}\pi r^2(h_1+3h_2+h_1)$.

3. 338 సెం.మీ^{3} **4.** 523.53 సెం.మీ^{3} **5.** 100 **6.** 892.26 కి.గ్రా.

7. 1.131 మీ^{3} (దాదాపు) **8.** సరైనది కాదు, సరైన జవాబు 346.51 సెం.మీ^{3}.

EXERCISE 13.1

1. 8.1 plants. We have used direct method because numerical values of x_i and f_i are small.
2. ₹ 545.20 3. $f = 20$ 4. 75.9
5. 57.19 6. ₹ 211 7. 0.099 ppm
8. 12.48 days 9. 69.43 %

EXERCISE 13.2

1. Mode = 36.8 years, Mean = 35.37 years. Maximum number of patients admitted in the hospital are of the age 36.8 years (approx.), while on an average the age of a patient admitted to the hospital is 35.37 years.
2. 65.625 hours
3. Modal monthly expenditure = ₹ 1847.83, Mean monthly expenditure = ₹ 2662.5.
4. Mode : 30.6, Mean = 29.2. Most states/U.T. have a student teacher ratio of 30.6 and on an average, this ratio is 29.2.
5. Mode = 4608.7 runs 6. Mode = 44.7 cars

EXERCISE 13.3

1. Median = 137 units, Mean = 137.05 units, Mode = 135.76 units.

   The three measures are approximately the same in this case.
2. $x = 8$, $y = 7$ 3. Median age = 35.76 years
4. Median length = 146.75 mm 5. Median life = 3406.98 hours
6. Median = 8.05, Mean = 8.32, Modal size = 7.88
7. Median weight = 56.67 kg

EXERCISE 14.1

1. (i) 1 (ii) 0, impossible event (iii) 1, sure or certain event

   (iv) 1 (v) 0, 1
2. The experiments (iii) and (iv) have equally likely outcomes.
3. When we toss a coin, the outcomes head and tail are equally likely. So, the result of an individual coin toss is completely unpredictable.
4. B 5. 0.95 6. (i) 0 (ii) 1
7. 0.008 8. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$
9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ 10. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

అభ్యాసం 13.1

1. 8.1 చెట్లు. ఇక్కడ x_i మరియు f_i చిన్న విలువలు కావున ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో చేయాలి.

2. ₹ 545.20 **3.** $f = 20$ **4.** 75.9

5. 57.19 **6.** ₹ 211 **7.** 0.099 ppm

8. 12.48 రోజులు **9.** 69.43 %

అభ్యాసం 13.2

1. బాహుళకం = 36.8సం.లు, సరాసరి = 35.37 సం.లు. హాస్పిటల్ లో చేరిన గరిష్ట రోగుల సరాసరి వయస్సు 36.8 రోజులు (దాదాపుగా), కానీ హాస్పిటల్ లో చేరిన రోగి సరాసరి వయస్సు 35.37 సం.లు

2. 65.625 గం.లు

3. నెలసరిఖర్చు బాహుళకం రూపంలో = ₹ 1847.83, నెలసరి ఖర్చు అంక మధ్యమం = ₹ 2662.5.

4. బాహుళకం : 30.6, సగటు = 29.2. ఎక్కువ రాష్ట్రాలు /కేంద్ర పాలిత ప్రాంతాల్లో విద్యార్థి, ఉపాధ్యాయ నిష్పతి 30.6 మరియు సరాసరిని ఈ నిష్పత్తి 29.2గా ఉంది.

5. బాహుళకం = 4608.7 పరుగులు **6.** బాహుళకం = 44.7 కార్లు

అభ్యాసం 13.3

1. మధ్యగతం = 137 యూనిట్లు, అంకమధ్యమం = 137.05 యూనిట్లు, బాహుళకం = 135.76 యూనిట్లు. ఈ సందర్భంలో మూడు కొలతలు దాదాపుగా ఒకే విధంగా ఉన్నాయి.

2. $x = 8, y = 7$ **3.** వయస్సుల మధ్యగతం = 35.76 సం.లు

4. పొడవుల మధ్యగతం = 146.75 మి.మీ **5.** జీవితకాల మధ్యగతం = 3406.98 గం.లు

6. మధ్యగతం = 8.05, సగటు = 8.32, బాహుళకం = 7.88

7. బరువుల మధ్యగతం = 56.67 కి.గ్రా.

అభ్యాసం 14.1

1. (i) 1 (ii) 0, అసాధ్య ఘటన (iii) 1, ఖచ్చిత లేదా నిర్దిష్ట సంఘటన
(iv) 1 (v) 0, 1

2. ప్రయోగాలు (iii) మరియు (iv) ల పర్యవసానాలు సమసంభవములు.

3. ఒక నాణెం ఎగుర వేసినప్పుడు, ఫలితాలు బొమ్మ మరియు బొరుసు సమానంగా వచ్చే అవకాశం ఉంది. కావున నాణెం ఎగురవేసినప్పటి ఫలితం పూర్తిగా ఊహాతీతం.

4. B **5.** 0.95 **6.** (i) 0 (ii) 1

7. 0.008 **8.** (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ **10.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$ **12.** (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{1}{4}$ (b) 0 **16.** $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ **18.** (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

22. (i)

'Sum on 2 dice'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probability	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) No. The eleven sums are not equally likely.

23. $\frac{3}{4}$; Possible outcomes are : HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH. Here, THH means tail in the first toss, head on the second toss and head on the third toss and so on.

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) Incorrect. We can classify the outcomes like this but they are not then 'equally likely'. Reason is that 'one of each' can result in two ways — from a head on first coin and tail on the second coin or from a tail on the first coin and head on the second coin. This makes it twicely as likely as two heads (or two tails).

(ii) Correct. The two outcomes considered in the question are equally likely.

11. $\frac{5}{13}$ **12.** (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{1}{4}$ (b) 0 **16.** $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ **18.** (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

22. (i)

'2' రెండు పాచికలపై మొత్తం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) లేదు. పదకొండు మొత్తాలు సమానంగా ఉండే అవకాశం లేదు.

23. $\frac{3}{4}$; సాధ్యపడు సంభావ్య ఫలితాలు: HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH. ఇక్కడ, THH అంటే మొదటి సారి ఎగురవేసినప్పుడు బొరుసు, రెండవ సారి వేసినప్పుడు బొమ్మ మరియు మూడవ సారి బొమ్మ, ఈ విధంగా అన్నీ అని అర్థం.

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) తప్పు, ఫలితాలను మనం ఈ విధంగా వర్గీకరించవచ్చు, కానీ అవి అప్పుడు 'సమ సంభవాలు' కాదు. కారణం ఏమిటంటే , 'ప్రతి నాణెం' రెండు విధాలుగా దారితీస్తుంది – మొదటి నాణెంపై బొమ్మ మరియు రెండవ నాణెంపై బొరుసు లేదా మొదటి నాణెంపై బొరుసు మరియు రెండవ నాణెంపై బొమ్మ. ఇది రెండు బొమ్మలు (లేదా రెండు బొరుసులు) కంటే రెట్టింపు అవకాశం కలిగివుంది.

(ii) సరైనది. ప్రశ్నలో పరిగణనలోకి తీసుకున్న రెండు ఫలితాలు సమ సంభవాలుగా ఉంటాయి.

EXERCISE A1.1

1. (i) Ambiguous (ii) True (iii) True (iv) Ambiguous
   (v) Ambiguous
2. (i) True (ii) True (iii) False (iv) True (v) True
3. Only (ii) is true.
4. (i) If $a > 0$ and $a^2 > b^2$, then $a > b$.
   (ii) If $xy \geq 0$ and $x^2 = y^2$, then $x = y$.
   (iii) If $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ and $y \neq 0$, then $x = 0$.
   (iv) The diagonals of a parallelogram bisect each other.

EXERCISE A1.2

1. A is mortal
2. ab is rational
3. Decimal expansion of $\sqrt{17}$ is non-terminating non-recurring.
4. $y = 7$
5. $\angle$ A = 100°, $\angle$ C = 100°, $\angle$ D = 180°
6. PQRS is a rectangle.
7. Yes, because of the premise. No, because $\sqrt{3721} = 61$ which is not irrational. Since the premise was wrong, the conclusion is false.

EXERCISE A1.3

1. Take two consecutive odd numbers as $2n + 1$ and $2n + 3$ for some integer n.

EXERCISE A1.4

1. (i) Man is not mortal.
   (ii) Line l is not parallel to line m.
   (iii) The chapter does not have many exercises.
   (iv) Not all integers are rational numbers.
   (v) All prime numbers are not odd.
   (vi) Some students are lazy.
   (vii) All cats are black.
   (viii) There is at least one real number x, such that $\sqrt{x} = -1$.

అభ్యాసం A1.1

1. (i) అస్పష్టమైన (ii) సత్యం (iii) సత్యం (iv) అస్పష్టమైన
(v) అస్పష్టమైన

2. (i) సత్యం (ii) సత్యం (iii) అసత్యం (iv) సత్యం (v) సత్యం

3. కేవలం (ii) మాత్రమే సత్యం.

4. (i) $a > 0$ మరియు $a^2 > b^2$ అయితే, అప్పుడు $a > b$.
(ii) $xy \geq 0$ మరియు $x^2 = y^2$ అయితే, అప్పుడు $x = y$.
(iii) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ మరియు $y \neq 0$ అయితే, అప్పుడు $x = 0$.
(iv) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

అభ్యాసం A1.2

1. A అనే స్త్రీ మరణించేదే. **2.** ab అనేది అకరణీయ సంఖ్య

3. $\sqrt{17}$ దశాంశ విస్తరణ అంతం కాని, ఆవర్తనం కాని దశాంశం.

4. $y = 7$ **5.** $\angle A = 100°, \angle C = 100°, \angle D = 180°$

6. PQRS అనేది దీర్ఘచతురస్రం.

7. అవును, ప్రతిపాదన సరిగా లేదు, ఎందుకంటే $\sqrt{3721} = 61$ ఇది కరణీయం కాదు. ప్రతిపాదన తప్పు కాబట్టి, నిర్ధారణ కూడా తప్పే.

అభ్యాసం A1.3

1. ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య 'n' కు రెండు వరుస బేసి సంఖ్యలను $2n + 1$ మరియు $2n + 3$ గా తీసుకోండి.

అభ్యాసం A1.4

1. (i) మనిషి చిరంజీవి.
(ii) l రేఖ m రేఖకు సమాంతరంగా ఉండదు.
(iii) అధ్యాయంలో ఎక్కువ అభ్యాసాలు లేవు.
(iv) అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు కావు.
(v) అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు బేసి సంఖ్యలు కావు.
(vi) కొంతమంది విద్యార్థులు సోమరులు.
(vii) అన్ని పిల్లులు నల్లగా ఉంటాయి.
(viii) $\sqrt{x} = -1$, అగునట్లు కనీసం ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయినా ఉంటుంది.

(ix) 2 does not divide the positive integer a.

(x) Integers a and b are not coprime.

2. (i) Yes (ii) No (iii) No (iv) No (v) Yes

EXERCISE A1.5

1. (i) If Sharan sweats a lot, then it is hot in Tokyo.

(ii) If Shalini's stomach grumbles, then she is hungry.

(iii) If Jaswant can get a degree, then she has a scholarship.

(iv) If a plant is alive, then it has flowers.

(v) If an animal has a tail, then it is a cat.

2. (i) If the base angles of triangle ABC are equal, then it is isosceles. True.

(ii) If the square of an integer is odd, then the integer is odd. True.

(iii) If $x = 1$, then $x^2 = 1$. True.

(iv) If AC and BD bisect each other, then ABCD is a parallelogram. True.

(v) If $a + (b + c) = (a + b) + c$, then a, b and c are whole numbers. False.

(vi) If $x + y$ is an even number, then x and y are odd. False.

(vii) If a parallelogram is a rectangle, its vertices lie on a circle. True.

EXERCISE A1.6

1. Suppose to the contrary $b \leq d$.

3. See Example 10 of Chapter 1.

6. See Theorem 5.1 of Class IX Mathematics Textbook.

EXERCISE A2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160

2. Take 1 cm^2 area and count the number of dots in it. Total number of trees will be the product of this number and the area (in cm^2).

3. Rate of interest in instalment scheme is 17.74 %, which is less than 18 %.

EXERCISE A2.3

1. Students find their own answers.

(ix) 2 అనేది ధన పూర్ణ సంఖ్య 'a' ను భాగించదు.

(x) a మరియు b అనేవి పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు కావు.

2. (i) అవును (ii) కాదు (iii) కాదు (iv) కాదు (v) అవును

అభ్యాసం A1.5

1. (i) శరణ్ కు చాలా చెమటలు పడితే, అప్పుడు టోక్యోలో వేడిగా ఉన్నట్లు.

(ii) షాలిని కడుపు సణుక్కుంటే అప్పుడు ఆకలి వేస్తుంది.

(iii) జస్వంత్ డిగ్రీ పొందగలిగితే, అప్పుడు ఆమెకు స్కాలర్ షిప్ వస్తుంది.

(iv) ఒక మొక్క సజీవంగా ఉంటే, దానికి పువ్వులు ఉంటాయి.

(v) ఒక జంతువుకు తోక ఉంటే, అప్పుడు అది పిల్లి అవుతుంది.

2. (i) ఒకవేళ త్రిభుజం ABC యొక్క భూ కోణాలు సమానంగా ఉన్నట్లయితే, అప్పుడు అది సమద్విబాహు త్రిభుజం అవుతుంది. సత్యం.

(ii) ఒక పూర్ణసంఖ్య యొక్క వర్గం బేసి సంఖ్య అయితే, అప్పుడు ఆ పూర్ణ సంఖ్య, బేసి సంఖ్య అగును. సత్యం.

(iii) ఒకవేళ $x = 1$, అయితే, అప్పుడు $x^2 = 1$. సత్యం.

(iv) ఒకవేళ AC మరియు BD ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొంటే, అప్పుడు ABCD అనేది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. సత్యం.

(v) ఒకవేళ $a + (b + c) = (a + b) + c$ అయితే, అప్పుడు a, b మరియు c లు పూర్ణాంకాలు. అసత్యం.

(vi) $x + y$ అనేది సరి సంఖ్య అయితే, అప్పుడు x మరియు y బేసి సంఖ్యలు అసత్యం.

(vii) ఒక సమాంతర చతుర్భుజం దీర్ఘచతురస్రం అయితే, దాని శీర్షాలు ఒక వృత్తం మీద ఉంటాయి. సత్యం.

అభ్యాసం A1.6

1. దీనికి విరుద్ధంగా $b \leq d$ అనుకుందాం.

3. 1వ అధ్యాయంలోని ఉదాహరణ 10 చూడండి.

6. తొమ్మిదో తరగతి గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని సిద్ధాంతం 5.1 చూడండి.

అభ్యాసం A2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160

2. 1 సెం.మీ^{2} వైశాల్యాన్ని తీసుకొని అందులోని చుక్కల సంఖ్యను లెక్కించండి. మొత్తం చెట్ల సంఖ్య ఈ సంఖ్య మరియు వైశాల్యం (సెం.మీ^{2}లో) యొక్క లబ్ధం అవుతుంది.

3. వాయిదాల పద్ధతిలో వడ్డీ రేటు 17.74%, ఇది 18% కంటే తక్కువ.

అభ్యాసం A2.3

1. విద్యార్థులు తమ స్వంత సమాధానాలను కనుగొంటారు.

Class X

Suggested Pedagogical Processes	Learning Outcomes
The learners may be provided with opportunities individually or in groups and encouraged to—	**The learner—**
• extend the methods of finding LCM and HCF of large numbers learnt earlier to general form.	• **generalises** properties of numbers and relations among them studied earlier to evolve results, such as, Euclid's division algorithm, Fundamental Theorem of Arithmetic and applies them to solve problems related to real life contexts.
• discuss different aspects of polynomials, such as—their degree, type (linear, quadratic, cubic), zeroes, etc., relationship between their visual representation and their zeroes.	
• play a game which may involve a series of acts of factorising a polynomial and using one of its factors to form a new one. For example, one group factorising say, ($x^3 - 2x^2 - x - 2$) and using one of its factors x–1 to construct another polynomial, which is further factorised by another group to continue the process.	• **develops** a relationship between algebraic and graphical methods of finding the zeroes of a polynomial.
• use quadratic equations to solve real life problems through different strategies, such as, making a perfect square, quadratic formula, etc.	• **finds** solutions of pairs of linear equations in two variables using graphical and different algebraic methods. • **demonstrates** strategies of finding roots and determining the nature of roots of a quadratic equation.
• discuss different aspects of linear equations by engaging students in the activities of the following nature: ▪ one group may ask another to form linear equation in two variables with coefficients from a particular number system, i.e., natural numbers or numbers that are not integers, etc. ▪ graphically representing a linear equation in 1D or 2D and try to explain the difference in their nature. ▪ encouraging students to observe identities and equations and segregate them.	• **develops** strategies to apply the concept of A.P. to daily life situations. • **works** out ways to differentiate between congruent and similar figures. • **establishes** properties for similarity of two triangles logically using different geometric criteria established earlier such as, Basic Proportionality Theorem, etc.
• use graphical ways to visualise different aspects of linear equations, such as, visualising linear equations in two variables or to find their solution.	
• observe and analyse patterns in their daily life situations to check if they form an Arithmetic Progression and, if so,	

find rule for getting their nth term and sum of n terms. The situations could be — our savings or pocket money, games such as, playing cards and snakes and ladders, etc.	
• analyse and compare different geometrical shapes, charts, and models made using paper folding and tell about their similarity and congruence. • discuss in groups different situations, such as, constructing maps, etc., in which the concepts of trigonometry are used. • work in projects related to heights and distances, that may include situations in which methods have to be devised for measuring the angle of inclination of the top of a building and their own distance from the building. • devise ways to find the values of different trigonometric ratios for a given value of a trigonometric ratio.	• **derives** formulae to establish relations for geometrical shapes in the context of a coordinate plane, such as, finding the distance between two given points, to determine the coordinates of a point between any two given points, to find the area of a triangle, etc. • **determines** all trigonometric ratios with respect to a given acute angle (of a right triangle) and uses them in solving problems in daily life contexts like finding heights of different structures or distance from them. • **derives** proofs of theorems related to the tangents of circles
• observe shapes in the surroundings that are a combination of shapes studied so far, such as, cone, cylinder, cube, cuboid, sphere, hemisphere, etc. They may work in groups and may provide formulas for different aspects of these combined shapes.	• **constructs—** ▪ a triangle similar to a given triangle as per a given scale factor. ▪ a pair of tangents from an external point to a circle and justify the procedures. • **examines** the steps of geometrical constructions and reason out each step
• determine areas of various materials, objects, and designs around them for example design on a handkerchief, design of tiles on the floor, geometry box, etc. • discuss and analyse situations related to surface areas and volumes of different objects, such as, (a) given two boxes of a certain shape with different dimensions, if one box is to be changed exactly like another box, which attribute will change, its surface area or volume? (b) By what percent will each of the dimensions of one box have to be changed to make it exactly of same size as the other box?	• **finds** surface areas and volumes of objects in the surroundings by visualising them as a combination of different solids like cylinder and a cone, cylinder and a hemisphere, combination of different cubes, etc.
• discuss and analyse the chance of happening of different events through simple activities like tossing a coin, throwing two dices simultaneously,	• **calculates** mean, median and mode for different sets of data related with real life contexts.

picking up a card from a deck of 52 playing cards, etc. • generalise the formulas of mean, median and mode read in the earlier classes by providing situations for these central tendencies. • collect data from their surroundings and calculate the central tendencies. • to draw tangents to a circle from a point which lies outside and a point which lies inside the circle. They may be motivated to evolve different ways to verify the properties of such tangents.	• **determines** the probability of an event and applies the concept in solving daily life problems.

Suggested Pedagogical Processes in an Inclusive Setup

Children with special needs to be taken along the class and keeping in view the learning objectives, similar to those of the others, appropriate activities may be designed. The teacher should take into account the specific problem of the child and plan alternate strategies for teaching-learning process. A healthy inclusive classroom environment provides equal opportunity to all the students; to those with and without learning difficulties. The measures to be adopted may include:

- developing process skills through group activities and using ICT for simulation, repeated practice and evaluation.
- assessing learning progress through different modes taking cognizance of the learner's response.
- observing the child's engagement in multiple activities, through varied ways and levels of involvement.
- using of embossed diagram in the pedagogical process and learning progress.
- using of adapted equipment (large print materials, adapted text materials with simple language, more pictures and examples, etc.) in observation and exploration (for example: visual output devices should have aural output and vice versa) during the teaching-learning process.
- using multiple choice questions to get responses from children who find it difficult to write or explain verbally.